Chương 1. Cơ sở vật lý của địa từ và thăm dò từ

Tôn Tích Ái

Địa từ và thăm dò từ. NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006.

Từ khoá: Địa từ và thăm dò từ, Trường từ, Thế từ, Hàm số thế, Trường thế.

Mục lục

Chương 1

Cơ sở vật lý của địa từ và thăm dò từ

1.1 Những định luật cơ bản của trường từ dừng

Có thể xem trường từ của quả đất là trường từ dừng vì phần trường thay đổi theo thời gian chỉ chiếm một phần rất nhỏ trong toàn bộ trường từ của quả đất. Biên độ của các biến thiên ngày đêm yên tĩnh không vượt quá vài chục nT. Ngoài ra, tần số biến thiên của chúng cũng khoảng 10^{-4} đến 10^{-1} Hertz, cho nên các trường từ biến thiên này cũng ảnh hưởng rất ít đến trường điện cảm ứng. Vì vậy trong đa số trường hợp nghiên cứu trường từ của quả đất, người ta thường dùng các định luật về trường dừng. Các định luật này là các trường hợp riêng của các định luật về trường điện từ, được biểu diễn bằng các phương trình Maxwell. Đối với môi trường có độ dẫn, các phương trình Maxwell đối với trường từ dừng có dạng:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0 \tag{1.2}$$

trong đó $\vec{H}$ là cường độ trường từ (hiện nay người ta thường dùng véc tơ cảm ứng từ $\vec{B}$ thay cho véc tơ cường độ trường từ $\vec{H}$, với ($\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}$), $\vec{j}$ là mật độ dòng dẫn.

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Phương trình (1.1) biểu thị sự liên hệ giữa cường độ trường từ và mật độ dòng tại cùng một điểm, còn (1.2) biểu diễn tính chất liên tục của trường từ. Vì vectơ $\vec{H}$ không có nguồn ($\mathrm{div}\vec{H} = 0$) nên có thể xem nó là rot của vectơ $\vec{A}$ nào đó, tức là:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{1.3}$$

Vì vậy phương trình (1.1) có dạng

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{j} \tag{1.4}$$

Nếu thay $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$ bằng biểu thức của nó, tức là

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A} - \Delta A$$

ta thu được:

$$\mathrm{graddiv}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \vec{j}$$

trong đó Δ là toán tử Laplace.

Chọn $\vec{A}$ sao cho thỏa mãn điều kiện

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$$

Trong trường hợp đó chúng ta thu được phương trình sau đối với vectơ $\vec{A}$

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j} \tag{1.5}$$

Vectơ $\vec{A}$ được gọi là thế vectơ. Khi xác định được $\vec{A}$ ta sẽ xác định được $\vec{H}$. Sở dĩ phải đưa vào thế véctơ là vì ta không thể giải trực tiếp phương trình (1.1) được, nhưng ngược lại, lại có thể giải được phương trình (1.5). Phương pháp giải phương trình này được trình bày trong các giáo trình về các phương trình vật lý toán.

Nghiệm của phương trình (1.5) có dạng:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{\vec{j}}{r} dv$$

trong đó r là khoảng cách từ yếu tố thể tích dv với mật độ dòng $\vec{j}$ chạy qua đến điểm cần tính thế véctơ.

Từ phương trình này bằng cách tính rot (lấy vi phân) theo các tọa độ của điểm P, điểm mà tại đó cần khảo sát thế véctơ A, ta thu được:

$$\vec{H} = \mathrm{rot}_p \vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int_v \mathrm{rot}_p \frac{\vec{j}}{r} dv = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{1}{r}\mathrm{rot}_p \vec{j}\, dv -$$
$$- \frac{1}{4\pi}\int_v [\vec{j}\ \mathrm{grad}_p \frac{1}{r}] dv$$

Vì giá trị của véctơ $\vec{j}$ không phụ thuộc vào điểm P, nên:

$\mathrm{rot}_p \vec{J} = 0$.

Ngoài ra:

$$\mathrm{grad}_p \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Vì vậy,

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dv. \tag{1.6}$$

hoặc viết công thức trên đối với biểu thức của $\vec{B}$

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dv$$

Biểu thức này được gọi là định luật Biot-Savart -Laplace dưới dạng tích phân.

Lấy tích phân hai vế của phương trình (1.1) theo một mặt S nào đó, ta thu được:

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\vec{H}\ \overrightarrow{dS}) = \int_S (\vec{j}\ \overrightarrow{dS})$$

Sử dụng công thức Stokes ta có

$$\oint (\vec{H}\ \overrightarrow{dl}) = I \tag{1.7}$$

trong đó I là cường độ dòng điện chạy qua mặt, còn tích phân ở vế trái phải tính theo đường bao quanh mặt đó.

Các phương trình (1.6) và (1.7) chứng tỏ rằng, trong môi trường có độ từ thẩm bằng đơn vị, trường từ chỉ có thể tồn tại khi có dòng điện dẫn, hoặc khi có dòng đối lưu tương đương với mật độ bằng:

$\vec{j} = e\vec{v}n$

trong đó e là điện tích của hạt mang điện (điện tử, iôn), $\vec{v}$ là vận tốc chuyển động và n là số hạt trong một đơn vị thể tích.

Trong phần môi trường không có dòng, các phương trình Maxwell có dạng sau đây:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = 0 \tag{1.8}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0 \tag{1.9}$$

Trong trường hợp này véctơ $\vec{H}$ có thể được biểu diễn dưới dạng gradient của một hàm vô hướng U nào đó, vì rotgradU = 0, nên phương trình (1.8) thỏa mãn. Vì vậy, nếu đặt:

$$\vec{H} = -\mathrm{grad}\,U(x, y, z)$$

và chú ý đến phương trình (1.9) ta có:

$$\mathrm{divgrad}\ U \equiv \Delta U = 0 \tag{1.10}$$

Hàm số U được gọi là hàm số thế từ, thỏa mãn phương trình Laplace. Để tìm hàm số đó ta cần phải giải phương trình (1.10). Để giải được phương trình này, cần phải biết được các điều kiện biên, tức là biết sự phân bố của hàm U hoặc là đạo hàm của nó theo pháp tuyến đối với một mặt nào đó.

Trong khi khảo sát các hiện tượng liên hệ với sự chuyển động của các hạt mang điện trong trường từ, ta cần phải bổ sung thêm một phương trình nữa vào trong các phương trình miêu tả đầy đủ trạng thái của trường từ. Đó là phương trình Lorentz.

$$\vec{F} = e\vec{E} + e[\vec{v}, \vec{H}] \tag{1.11}$$

trong đó $\vec{F}$ là lực tác dụng lên điện tích e chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ trong điện từ trường $\vec{E}$ và $\vec{H}$.

1.2 Trường từ của một vòng dây khép kín

Khi khảo sát nhiều vấn đề trong lý thuyết trường từ của quả đất người ta thường gặp phải trường từ của một nam châm cơ bản (lưỡng cực từ) hoặc vòng dây cơ bản tương đương với chúng.

Hiểu biết các qui luật về trường từ của các mô hình đó hết sức quan trọng. Các qui luật này được suy ra từ các phương trình của trường từ.

Đầu tiên chúng ta sẽ khảo sát trường từ của một vòng dây có hình dạng bất kỳ. Ở đây vòng dây chính là một dây dẫn khép kín mà tiết diện ngang của sợi dây vô cùng nhỏ, dòng điện chạy qua vòng dây đó có độ lớn hữu hạn I. Có thể tính trường từ của vòng dây này từ định luật Biot-Savart- Laplace. Trong trường hợp này, định luật đó được biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{[\overrightarrow{dl}, \vec{r}]}{r^3}$$

hoặc

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{[\overrightarrow{dl}, \vec{r}]}{r^3}.$$

vì $\vec{j}dv = Id\vec{l}$, trong đó dl là yếu tố độ dài của vòng dây. Thành phần của véc tơ $\vec{H}$ theo trục x sẽ là:

$$H_x = \frac{I}{4\pi}\oint \left(\frac{r_z}{r^3}dy - \frac{r_y}{r^3}dz\right). \quad (1.12)$$

Nếu gọi tọa độ của điểm đặt véctơ P (điểm cần xác định các giá trị của $\vec{H}$ hoặc $\vec{B}$**)** là x_1, y_1, z_1 , còn tọa độ của yếu tố dl là x, y, z, thì

$$r_y = y_1 - y, \quad r_z = z_1 - z. \quad (1.13)$$

Đưa vào véctơ phụ $\vec{L}$ với các thành phần bằng:

$$L_x = 0, \quad L_y = \frac{r_z}{r^3}, \quad L_z = -\frac{r_y}{r^3}. \quad (1.14)$$

Các biểu thức này cho thấy là hướng của véc tơ $\vec{L}$ hoàn toàn được xác định bởi tọa độ của điểm P và yếu tố dl. Trong trường hợp đó có thể viết công thức (1.12) dưới dạng

$$H_x = \frac{I}{4\pi}\oint(\vec{L}, \overrightarrow{dl}).$$

Áp dụng định lý Stokes về biến đổi tích phân đường thành tích phân mặt ta có:

$$H_x = \frac{I}{4\pi}\int_S (\text{rot}\,\vec{L}\,\overrightarrow{dS}). \quad (1.15)$$

Tích phân lấy trên toàn mặt bị vòng dây bao quanh, đồng thời dạng và các kích thước của mặt có thể tùy ý.

Hướng của pháp tuyến đối với yếu tố mặt dS phụ thuộc vào hướng của yếu tố vòng dây dl (tức là hướng của dòng).

Theo công thức về tích vô hướng ta có:

$$\left(\text{rot}\vec{L}\overrightarrow{dl}\right) = \text{rot}_x L dS_x + \text{rot}_y L dS_y + \text{rot}_z L dS_z$$

Thay các thành phần của rot theo các công thức về giải tích véc tơ, còn các thành phần của yếu tố mặt qua các cos của góc tạo bởi pháp tuyến và các trục tọa độ, chúng ta có:

$$(\mathrm{rot}\vec{L}\overrightarrow{dl}) = [(\frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial L_y}{\partial z})\cos(n,x) + (\frac{\partial L_x}{\partial z} - \frac{\partial L_z}{\partial x})\cos(n,y) + \\ + (\frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial y})\cos(n,z)] \qquad (1.16)$$

Hơn nữa, sử dụng các biểu thức (1.13) và (1.14) , tìm các đạo hàm riêng $\frac{\partial L_z}{\partial y}$ và $\frac{\partial L_y}{\partial z}$ và đặt chúng vào trong phương trình (1.16), ta thu được

$$(\mathrm{rot}\vec{L}\overrightarrow{dS}) = -[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1 \partial x_2}\cos(n,x) + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1 \partial y}\cos(n,y) + \\ + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_1 \partial z}\cos(n,z)]dS$$

Các cos của các giá trị tạo bởi pháp tuyến $\vec{n}$ của yếu tố mặt dS với các trục tọa độ là các đạo hàm theo pháp tuyến của các tọa độ tương ứng. Vì vậy biểu thức trên có dạng:

$$(\mathrm{rot}\vec{L}\overrightarrow{dS}) = -\frac{\partial}{\partial x_1}[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\frac{dz}{dn}]dS$$

hoặc

$$(\mathrm{rot}\vec{L}\overrightarrow{dS}) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\right]dS$$

Vì vậy nếu trong (1.15) thay tích vô hướng của $\mathrm{rot}\,\vec{L}$ với yếu tố mặt dS qua các đạo hàm thì chúng ta thu được:

$$H_x = -\frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}dS$$

Tương tự ta tìm được các thành phần H_y và H_z:

$$H_y = -\frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}dS$$

$$H_z = -\frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}dS$$

Từ đó:

$$\vec{H} = -\frac{I}{4\pi}\overrightarrow{grad}\int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}dS = -\frac{I}{4\pi}\overrightarrow{grad}\int \frac{dS}{r^2}\cos(n,r)$$

Biểu thức $\frac{dS}{r^2}$ cos (n,r) chính là yếu tố góc đặc dΩ nhìn từ điểm P xuống dS, do đó:

$$\vec{H} = -\overrightarrow{grad}\frac{I\Omega}{4\pi} \tag{1.17}$$

trong đó Ω là góc đặc nhìn từ điểm P xuống vòng dây. Vì vậy $\frac{I\Omega}{c}$ là thế từ của vòng dây kín. Như vậy thế từ của vòng dây bằng:

$$U = \frac{I\Omega}{4\pi} \tag{1.18}$$

1.3 Trường từ của vòng dây cơ bản và của lưỡng cực từ

Nếu vòng dây dài khép kín là vòng dây cơ bản với diện tích vô cùng bé, thì tương ứng với công thức (1.18), thế từ dU của nó được biểu diễn bằng phương trình:

$$dU = \frac{IdS}{4\pi r^2}\cos(n,r),$$

hoặc dưới dạng véctơ

$$dU = I\frac{(\overrightarrow{dS},\vec{r})}{4\pi r^3} \tag{1.19}$$

Thế từ của một lưỡng cực từ tưởng tượng cũng có dạng hoàn toàn như vậy. Lưỡng cực từ gồm hai từ tích điểm m có dấu khác nhau và nằm cách nhau một khoảng bé dl. (Cho đến nay người ta chưa tìm ra được từ tích, nhưng người ta có thể tưởng tượng có từ tích). Trong trường hợp này sử dụng định luật Coulomb, chúng ta có:

$$dU = \frac{mdl}{4\pi r^2}\cos(\overrightarrow{dl},\vec{r}) = \frac{m(\overrightarrow{dl},\vec{r})}{4\pi r^3} \tag{1.20}$$

Tích $m\vec{dl}$ được gọi là mômen từ. Đây là một véctơ có hướng trùng với hướng $\vec{dl}$ và có trị số bằng tích của khối từ m với khoảng cách giữa các từ tích, tức là:

$$m\vec{dl} = \vec{P}_m$$

So sánh (1.19) với (1.20), ta thấy rằng, chúng sẽ đồng nhất với nhau, nếu như đặt:

$$I\,\overrightarrow{dS} = m\,\overrightarrow{dl} \tag{1.21}$$

Tức là thay dòng cơ bản bằng lưỡng cực từ với mômen từ bằng $I\,d\vec{S}$. Vì vậy tương tự, đại lượng $I\,\overrightarrow{dS}$ được gọi là mômen từ của dòng cơ bản. Như vậy, có thể nói rằng mômen từ của dòng cơ bản là véctơ có trị số bằng tích của cường độ dòng với diện tích của vòng dây và có hướng trùng với pháp tuyến của mặt bao bởi vòng dây $d\vec{S}$, điều đó có nghĩa là:

$$\vec{P}_m = I\,d\vec{S}$$

Vì hướng pháp tuyến bất kỳ, nên chúng ta quy ước lấy hướng dương là hướng của pháp tuyến trùng với hướng chuyển động tịnh tiến của cái vặn nút chai, nếu như nó quay theo hướng của dòng.

Như vậy, thế từ do vòng dây cơ bản gây ra, và do đó cường độ từ trường tỷ lệ với mômen từ của vòng dây:

$$\begin{aligned} U &= \frac{(\vec{P}_m, \vec{r})}{4\pi r^3} = P_m \frac{(\vec{n}, \vec{r})}{4\pi r^3} \\ H &= -\text{grad}\frac{(\vec{P}_m, \vec{r})}{4\pi r^3} = \frac{\vec{P}_m}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{n}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{n}}{r^3}\right] \end{aligned} \tag{1.22}$$

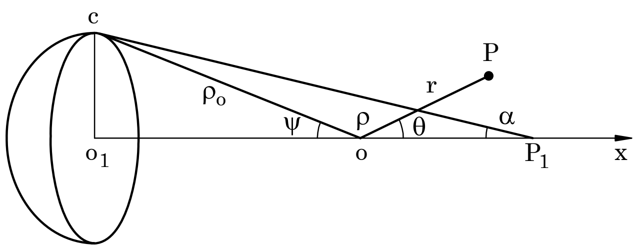
trong đó $\vec{n}$ là véctơ đơn vị có hướng trùng với hướng của mômen từ.

Vì vậy khái niệm về mômen từ, trong khi khảo sát trường từ của dòng điện, cũng đóng vai trò như khái niệm từ tích trong trường hợp của nam châm không đổi. Nếu mở rộng khái niệm đó đối với vòng dây có kích thước hữu hạn, thì ta có thể chứng minh rằng cường độ trường từ của vòng dây hữu hạn cũng tỷ lệ với tích của cường độ dòng điện với diện tích của vòng dây.

Các công thức (1.20) và (1.21) cho phép thay thế các dòng cơ bản bằng các lưỡng cực từ, trong khi tính toán thế từ của các vòng dây có dòng điện chạy qua.

1.4 Trường từ của một vòng dây tròn

Để tìm thế từ của một vòng dây tròn có bán kính R, cần phải tính góc đặc Ω như là hàm số của toạ độ điểm P (Hình 1.1)



Hình 1.1

Trường từ của vòng dây tròn

Nếu nhận trục cực là trục của vòng dây Ox, và do tính đối xứng của trường từ đối với trục đó, nên thế từ tại điểm P chỉ phụ thuộc vào các tọa độ θ và r, tức là (Hình 1.1):

$$\Omega = f(r,\theta)$$

Từ lý thuyết các hàm số cầu ta biết rằng, mọi hàm số của tọa độ r và θ, thỏa mãn phương trình Laplace có thể được khai triển thành chuỗi các hàm lũy thừa của r theo một trong những công thức sau:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \\ \Omega &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

trong đó $P_n(\cos\theta)$ là đa thức Legendre, A_n và B_n là các hệ số hằng số không phụ thuộc vào các tọa độ của điểm P.

Đa thức Legendre là các hàm đại số của cosθ bậc n và là các hệ số của x trong khai triển biểu thức.

$$\varphi(\alpha) = \left[1 + \left(\alpha^2 - 2\alpha\cos\theta\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

tức là:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= 1 + \alpha\cos\theta + \alpha^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \alpha^3\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\cos\theta) \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &P_0(\cos\theta) = 1, \\ &P_1(\cos\theta) = \cos\theta \\ &P_2(\cos\theta) = \frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2} \\ &P_3(\cos\theta) = \frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta \quad \text{và v.v...} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Như đã biết, đa thức Legendre có một số tính chất cơ bản như sau:

1- Nếu biến số của đa thức cosθ thay đổi dấu, thì các đa thức bậc chẵn sẽ không thay đổi, còn các đa thức bậc lẻ thay đổi dấu.

2- Đạo hàm của đa thức Legendre theo cosθ được biểu diễn bằng công thức:

$$\frac{dP_n(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} = \frac{n}{\sin^2\theta}\left[P_{n-1}(\cos\theta) - \cos\theta P_n(\cos\theta)\right] \tag{1.25}$$

Có thể thử lại tính chất này bằng cách vi phân các biểu thức (1.24).

3- Khi $\cos\theta = 1$, tất cả các đa thức đều bằng đơn vị, tức là $P_n(1) = 1$

4 - Khi $\cos\theta = 0$, các đa thức lẻ bằng không, còn các đa thức chẵn bằng:

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1.2.3...(2n-1)}{2.4...2n} \tag{1.26}$$

Trên cơ sở các tính chất này ta chuyển sang tìm biểu thức của góc đặc Ω, tức là tìm các hệ số A_n và B_n trong các phương trình (1.23).

Để tìm các hệ số A_n hoặc B_n, chỉ cần khai triển Ω cho một trường hợp riêng, rồi so sánh các hệ số của khai triển này với các hệ số A_n và B_n của cùng một hàm số r^n hoặc $\frac{1}{r^{n+1}}$. Nếu lấy điểm P_1 nằm trên trục tọa độ, thì ta dễ dàng tìm được góc đặc Ω mà từ P_1 nhìn xuống vòng dây.

Thật vậy từ P_1 vẽ mặt cầu có bán kính $P_1C = \rho$, chúng ta có:

$$\Omega_{P_1} = -\int \frac{ds}{\rho^2}\cos(n,\rho) = -2\pi \int_{\varphi=0}^{\alpha} \cos(n,\rho)\sin\varphi d\varphi$$
$$= -2\pi\cos(n,\rho)(1-\cos\alpha)$$

trong đó α là góc OP_1C, còn $\cos(n,\rho)$ có giá trị hoặc +1 hoặc -1, phụ thuộc vào hướng của dòng ở trong vòng dây. Giả sử rằng, dòng hướng theo chiều kim đồng hồ, và nếu như ta nhìn vào nó từ gốc tọa độ, thì

$\cos(n,p) = 1$,

còn:

$$\cos\alpha = \frac{\rho_0\cos\psi + r}{\rho} = \frac{\rho_0\cos\psi + r}{\sqrt{\rho_0^2 + r^2 - 2\rho_0 r\cos(\pi-\psi)}}$$

trong đó $\psi = O_1OC$.

Giả sử rằng $r < \rho_o$ và đem ρ_o ra khỏi dấu căn, ta có:

$$\cos\alpha = (\cos\psi + \frac{r}{\rho_o})\left[1 + (\frac{r}{\rho_o})^2 - 2\frac{r}{\rho_o}\cos(\pi-\psi)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Khai triển biểu thức ở trong ngoặc thứ hai theo đa thức Legendre, lúc đó ta có:

$$\cos\alpha = \cos\psi\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{\rho_o})^n P_n[\cos(\pi-\psi)]$$
$$+\frac{r}{\rho_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{\rho_0})^n P_n[\cos(\pi-\psi)]$$

Đặt giá trị của cosα vào trong biiểu thức của Ω_{P1}, sau một vài biến đổi đơn giản ta thu được:

$$\Omega_{P_1} = -2\pi\{1-\cos\psi-\cos\psi\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{\rho_o})^n P_n[\cos(\pi-\psi)]$$
$$+\frac{r}{\rho_o}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{r}{\rho_o})^n P_n[\cos(\pi-\psi)]\}$$

Biểu thức nằm dưới dấu tổng trong ngoặc vuông, theo tính chất của các đa thức Legendre (1.25), có thể được thay thế bằng đạo hàm của đa thức.

Vì vậy,

$$\Omega_p = -2\pi\left\{1-\cos\psi-\sin^2\psi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{r}{\rho_o})^2\frac{dP_n[\cos(\pi-\psi)]}{d\cos(\pi-\psi)}\right\} \quad (1.27)$$

Với các điểm nằm trên trục của vòng dây, θ = 0, và do đó, biểu thức của góc đặc (1.23) thành một trong các dạng sau:

$$\Omega = -\sum A_n r^n \text{, nếu } r < \rho_o \quad (1.28)$$

và

$$\Omega = -\sum\frac{B_n}{r^{n+1}}\text{, nếu } r > \rho_o \quad (1.29)$$

trong đó ρ_o là khoảng cách từ gốc tọa độ đến vòng dây.

So sánh biểu thức (1.28) với biểu thức (1.27), ta tìm được:

$$A_o = 1-\cos\psi,\; A_n = \sin^2\varphi\frac{1}{n}.\frac{dP_n[\cos(\pi-\psi)]}{d\cos(\pi-\psi)}\frac{1}{\rho_o^n}$$

Do đó, thế của vòng dây tròn tại một điểm bất kỳ của không gian thỏa mãn điều kiện:

$r < \rho_o$ và $\theta < \pi/2$, có dạng sau:

$$U = -\frac{\Omega I}{4\pi} = \frac{2\pi I}{4\pi}\{1-\cos\psi$$
$$-\sin^2\psi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{r}{\rho_o})^n P_n(\cos\theta)\frac{dP_n[\cos(\pi-\psi)]}{d\cos(\pi-\psi)}\} \quad (1.30)$$

Với điểm nằm bên trái gốc tọa độ ($\theta > \pi/2$), biểu thức của thế có dạng:

$$U = -\frac{2\pi I}{4\pi}\{1-\cos\psi-$$
$$-\sin^2\psi\sum\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^n P_n(\cos\theta)\frac{dP_n(\cos\psi)}{d\cos\psi}\} \quad (1.31)$$

Các thành phần của cường độ trường từ theo trục x và trục y được xác định từ biểu thức:

$$H_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2\pi I}{4\pi}\frac{\sin^2\psi}{\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{\rho_0})^{n-1}P_n^{'}(\cos\psi)$$

$$\times[\cos\theta P_n(\cos\theta) + \frac{\sin^2\theta}{n}P_n^{'}(\cos\theta)]$$

$$H_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2\pi Iy}{4\pi}\frac{\sin^2\psi}{\rho_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{\rho_0})^{n-2}P_n^{'}(\cos\varphi)[P_n\cos\theta)$$

$$-\frac{\cos\theta}{n}P_n^{'}(\cos\theta)] \quad (1.32)$$

trong đó $P_n'(\cos\theta)$ và $P_n'(\cos\psi)$ biểu thị các đạo hàm theo cosθ và cosφ. Hơn nữa, nếu thay biểu thức trong dấu ngoặc vuông theo công thức (1.25), ta thu được biểu thức của H_x như sau:

$$H_x = \frac{2\pi\sin^2\psi}{4\pi\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{r}{\rho_0})^{n-1}P_n^{'}(\cos\psi)P_{n-1}(\cos\theta)$$

Chú ý đến các công thức Legendre và thay $\sin\psi$ và $\cos\psi$ theo các giá trị của chúng qua $x_0 = OO_1, \rho_0$, ta có:

$$H_x = \frac{2\pi IR^2}{4\pi\rho_0^3}[1 + \frac{3x_0}{\rho_0^2}r\cos\theta$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{4x_0^2 - R^2}{\rho_0^4}r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

$$+ \frac{5}{4}\frac{x_0(2x_0^2 - 3R^2)}{\rho_0^6}r^3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \quad (1.33)$$

$$+ \frac{15}{64}\frac{(8x_0^4 - 12x_0^2R^2 + R^4)r^4}{\rho_0^8}(35\cos^4\theta - 15\cos^2\theta + 3)]$$

$$H_y = \frac{3\pi IR^2x_0y}{4\pi\rho_0^5}[1 + \frac{r}{\rho_0^2}(2x_0^2 - 3R^2)\cos\theta$$

$$-\frac{5}{8}\frac{r^2}{\rho_0^4}(4x_0^2 - 3R^2)] \quad (1.34)$$

Với các điểm nằm trên trục y (θ = 90^o và r = y), các công thức của H_x và H_y với độ chính xác đến các số hạng bốn, có dạng:

$$H_x = 2\pi I\frac{R^2}{4\pi\rho_o^3}[1 + \frac{3}{4}\frac{y^2}{\rho_0^4}\left(R^2 - 4x_0^2\right)$$

$$+\frac{45}{64}\frac{y^4}{\rho_0^8}\left(R^4 - 12R^2x_0^2 + 8x_0^4\right) \quad (1.35)$$

$$H_y = 3\pi I \frac{R^2}{4\pi} \frac{x_0 y}{\rho_0^5} [1 - \frac{5}{8} \frac{y^2}{\rho_0^4} \left(3R^2 - 4x_0^2\right) - \frac{35}{64} \frac{y^4}{\rho_0^8} \left(5R^4 - 20R^2 x_0^2 + 8x_0^4\right)] \tag{1.36}$$

Tại gốc tọa độ, (điểm 0):

$$H_x = \frac{2\pi I R^2}{4\pi\rho_0^3} = \frac{p_m}{2\pi\rho_0^3},$$

$$H_y = 0 \quad \text{với} \quad p_m = \pi I R^{2-}.$$

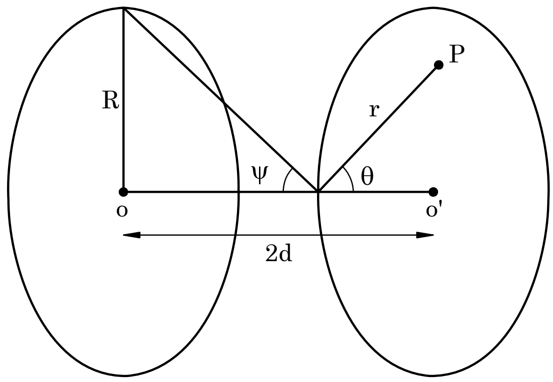
Đây là kết quả mà trong giáo trình vật lý sơ cấp đã trình bày.

Vì trị số cường độ trường, không phụ thuộc vào việc chọn gốc tọa độ, nên để cho thuận tiện trong khi sử dụng, thực tế người ta dùng các công thức (1.35) và (1.36). Trong các công thức này, gốc tọa độ trùng với hình chiếu của điểm cần khảo sát lên trục của vòng dây tròn.

1.5 Trường từ của vòng dây Helmholtz

Hai vòng dây có đường kính giống nhau, nằm cách nhau một khoảng bằng bán kính R của chúng, với tâm nằm trên trục chung OO' được gọi là vòng Helmholtz.

Đặc điểm của các vòng dây này là sự đồng nhất của trường từ trong phần tâm của chúng. Vì vậy vòng Helmholtz được sử dụng rộng rãi trong thực tế đo từ, như là một nguồn trường từ đồng nhất.



Hình 1.2

Vòng dây Helmhollz

Để tìm cường độ trường từ của các vòng dây đó, người ta dùng các công thức (1.31) và (1.32) và đặt gốc tọa độ nằm trên đường nối các tâm của các vòng dây đồng thời cho khoảng cách giữa các vòng dây bất kỳ và bằng 2d (Hình 1.2).

Vì với hai vòng dây thì r, θ và ρ_0 là đồng nhất, còn ψ khác nhau một góc 180^0, nên:

$$H_x = \frac{2\pi I\omega \sin^2\psi}{4\pi\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{n-1} P_{n-1}(\cos\theta)\{P'_n(\cos\psi) +$$
$$+ P'_n[\cos(\pi-\psi)]\}$$

Theo tính chất của đa thức Legendre:

$$P'_{2n}(\cos\psi) = -P'_{2n}[\cos(\pi-\psi)],$$

$$P'_{2n-1}(\cos\psi) = P'_{2n-1}[\cos(\pi-\psi)].$$

Vì vậy các số hạng chứa các đạo hàm bậc chẵn sẽ bị triệt tiêu, còn số hạng chứa bậc lẻ thì lại được tăng lên gấp đôi, do đó:

$H_x = \frac{4\pi I\omega \sin^2\psi}{4\pi\rho_0}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{2n-1} P_{2n-2}(\cos\theta)P'_{2n-1}(\cos\psi)$ Giới hạn đến các số hạng bậc bốn chúng ta có:

$$H_x = \frac{4\pi I\omega \sin^2\psi}{4\pi\rho_0}[1 + \frac{r^2}{\rho_0^2}P'_3(\cos\psi)P_2(\cos\theta)$$
$$+ \frac{r^4}{\rho_0^4}P'_5(\cos\psi)P_4(\cos\theta)] \tag{1.37}$$

Tương tự, ta thu được:

$$H_y = \frac{4\pi I_y\omega \sin^2\psi}{4\pi\rho_0}\{\frac{r}{\rho_0}P_3(\cos\psi)[P_3(\cos\theta)$$
$$-\frac{\cos\theta}{3}P'_3(\cos\theta)] + \frac{r^3}{\rho_0^3}P_5(\cos\psi)[P_5(\cos\theta) \tag{1.38}$$
$$-\frac{\cos\theta}{5}P'_5(\cos\theta)] + \ldots\}$$

Chọn góc ψ sao cho số hạng thứ hai trong (1.37) bằng không, muốn vậy cần sao cho:

$$P'_3(\cos\psi) = 0, \text{ hoặc } \frac{5}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2} = 0$$

Từ đó

$$\cos^2\psi = \frac{1}{5}$$

Vì

$$\cos^2\psi = \frac{d^2}{d^2 + R^2}, \text{ nên } d = \frac{R}{2}$$

Do đó khi đặt hai vòng dây nằm cách nhau một khoảng bằng R, thì số hạng thứ hai trong khai triển của H bằng không. Vì vậy tại các điểm nằm cách tâm một khoảng r nhỏ so với nửa khoảng cách giữa các vòng dây, thành phần trường dọc theo trục OO' giống nhau, tức là với độ chính xác đến số hạng bậc bốn trường từ tại phần tâm của vòng dây được xem như là đồng nhất.

Ưu điểm của hệ thống tạo trường từ này so với xôlênôit (trường từ tại phần tâm của xôlênôit cũng đồng nhất) là người quan sát có thể chạm đến được không gian có tồn tại trường đồng nhất. Không gian có trường đồng nhất không bị một thiết bị nào choán chỗ và vì vậy có thể đặt vào trong đó các mẫu vật hoặc các dụng cụ bất kỳ, miễn là kích thước của chúng không vượt quá kích thước của vòng dây.

Nhược điểm của vòng Helmholtz so với xôlênôit là không thể tạo được trường từ mạnh.

Trong thực tế vòng Helmholtz gồm có hai hệ vòng dây có tiết diện ngang là hình chữ nhật được sắp đặt sao cho trường từ ở phần tâm là trường đồng nhất. Trong trường hợp này để tính được từ trường do vòng Helmholtz tạo ra, người ta phải kể đến các số hạng hiệu chính cho sự hữu hạn của tiết diện ngang của vòng dây.

1.6 Thế từ của vật thể bị từ hóa

Có thể xem vật thể bị từ hóa như là bao gồm vô số các nam châm cơ bản, hay là vô số các lưỡng cực từ, với thế từ dU được biểu diễn bằng công thức:

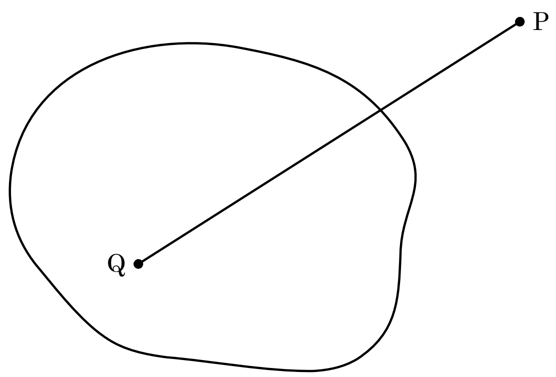
$$dU = \frac{(\overrightarrow{dP_m}, \vec{r})}{4\pi r^3}$$

trong đó $d\vec{P}_m$ là mômen từ của lưỡng cực. Có thể thay thế $d\vec{P}_m = \vec{J}dv$, trong đó dv là yếu tố thể tích. Khi đó:

$$dU = \frac{(\vec{J}, \vec{r})}{4\pi r^3} dv,$$

hoặc

$$dU = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{J}\,\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r}\right)dV.$$



Hình 1.3

Thế từ của vật thể bị từ hoá

Do đó, thế từ U do toàn vật thể gây ra tại điểm P (Hình 1.3) sẽ là:

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int(\vec{J}\,\mathrm{grad}\frac{1}{r})dv \tag{1.39}$$

Trong trường hợp này tích phân lấy theo toàn vật thể, còn $\mathrm{grad}\frac{1}{r}$ lại tính theo các tọa độ của P. Như đã biết:

$$\mathrm{grad}_P\frac{1}{r} = -\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}$$

nên biểu thức (1.39) có dạng:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int(\vec{J}\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r})dv \tag{1.40}$$

Sử dụng công thức giải tích véctơ vào trong (1.40), ta thu được:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{div}\left(\frac{\vec{J}}{r}\right)dv - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathrm{div}\,\vec{J}}{r}dv$$

Biến đổi tích phân thứ nhất thành tích phân mặt theo công thức Ostrogradski-Gauss, công thức trên sẽ trở thành dạng:

$$U = \frac{1}{4\pi}\left(\int_S\frac{\vec{j}\,\overrightarrow{dS}}{r} - \int_V\frac{\mathrm{div}\vec{J}}{r}dv\right) \tag{1.41}$$

Tích phân thứ nhất tính theo mặt S, còn tích phân thứ hai lấy theo toàn thể tích V.

Biểu thức (1.41) hoàn toàn tương tự với biểu thức thế của các điện tích phân bố trên mặt với mật độ σ và ở trong với mật độ ρ; nếu như chúng ta giả thiết rằng ở trên mặt, các từ tính ảo phân bố với mật độ

$$\sigma = J_n, \tag{1.42}$$

và ở trong, phân bố theo mật độ khối

$$\rho = -\mathrm{div}\vec{J} \tag{1.43}$$

Biểu thức (1.41) đúng cho tất cả các điểm của không gian: ở trong cũng như ở ngoài vật thể.

Nếu trong phương trình (1.40) véctơ $\vec{J}$ không đổi, tức là có thể xem vật bị từ hóa đồng nhất, thì phương trình đó sẽ chuyển thành dạng sau:

$$U = -\frac{1}{4\pi}(\vec{J}\int \mathrm{grad}_p\frac{1}{r}dv)$$

Vì phép tính grad được tính theo tọa độ của điểm P, còn tích phân lại được tính theo tọa độ của điểm Q, nên ta có thể thay đổi thứ tự tính toán của chúng.

$$U = -\frac{1}{4\pi}(\vec{J}\,\text{grad}\int\frac{dv}{r}) \qquad (1.44)$$

Nếu gọi $V = \int\frac{dv}{r}$, thì ta thu được biểu thức của thế từ dưới dạng đơn giản:

$$U = -\frac{1}{4\pi}\vec{J}\,\overrightarrow{\text{grad}}V \qquad (1.45)$$

trong đó V có thể được xem như là thế trọng lực (hấp dẫn) của vật thể có mật độ bằng đơn vị.

Như vậy thế từ của một vật thể bị từ hóa đồng nhất với dấu ngược lại bằng tích vô hướng của độ từ hóa $\vec{J}$ với gradient của thế trọng lực của vật thể nhiễm từ, nếu xem mật độ của nó bằng đơn vị. Công thức (1.45) được gọi là công thức Poisson.

Theo công thức này, ta có thể tìm được thế từ của các vật thể bị từ hóa đồng nhất, có mật độ không đổi, qua thế trọng lực của chính vật thể đó.

Ngoài ra, khi vật thể bị từ hóa đồng nhất, thì từ phương trình (1.41), ta thu được:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int_s\frac{J_n}{r}ds \qquad (1.46)$$

vì

$$\text{div}\vec{J} = 0,$$

Để tìm thế từ theo công thức (1.46) cần phải biết sự phân bố mặt của thành phần pháp tuyến của véctơ từ hóa. Tùy thuộc vào dạng của vật thể, khi tìm thế từ của chúng người ta dùng, hoặc công thức (1.45) hoặc (1.46). Ví dụ với hình cầu, elipxôit, người ta thường dùng công thức (1.45), vì thế trọng lực của chúng đã được biết trước, ngược lại với các vật thể hình lăng trụ, hình trụ, tốt hơn hết để tìm thế từ của chúng, người ta sử dụng công thức (1.46).

Để minh họa, ta hãy xét một số thí dụ về từ trường của hình cầu, hình trụ và của êlipxôit.

1.7 Thế từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất

Thế trọng lực V do quả cầu có mật độ khối lượng bằng đơn vị gây ra tại điểm ngoài P cách tâm quả cầu một khoảng R có dạng

$$V = \frac{v}{R}$$

trong đó v là thể tích của hình cầu.

Vì vậy, thế từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất tại cùng điểm đó có dạng:

$$U = \frac{1}{4\pi}v\frac{(\vec{J}\vec{R})}{R^3}$$

hoặc

$$U = \frac{1}{4\pi}\frac{(\vec{M}\vec{R})}{R^3}$$

Như vậy là thế từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất ở tại không gian ngoài tương đương với thế của một lưỡng cực.

Để tìm thế từ tại điểm trong hình cầu cách tâm một khoảng R_1, vẽ mặt cầu bán kính R_1 để chia hình cầu đó ra thành hai phần.

Thế từ U tại điểm nằm trên mặt cầu bằng tổng của thế U_1 do hình cầu bán kính R_1 gây ra và thế U_2 do lớp cầu gây ra.

Như vậy, thế U_1 được biểu diễn bằng phương trình:

$$U_1 = \frac{4}{34\pi}\pi\frac{R_1^3}{R_1^3}(\vec{J}\,\vec{R}_1) = \frac{4}{34\pi}\pi(\vec{J}\,\vec{R}_1) = \frac{1}{3}(\vec{J}\vec{R})$$

Thế trọng lực ở trong lớp cầu là một đại lượng không đổi và gradient bằng không, vì vậy.

$U_2 = 0$

Do đó thế ở trong hình cầu:

$$U = U_1 = \frac{1}{3}(\vec{J}\,\vec{R}_1),$$

Từ đó cường độ từ trường ở trong hình cầu:

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,U = -\frac{1}{3}\vec{J} \tag{1.47}$$

và

$$\vec{B} = -\mu_0\frac{\vec{J}}{3}$$

Do đó, $\vec{H}$ tỷ lệ với độ từ hóa $\vec{J}$ và có hướng ngược với hướng của $\vec{J}$. Hệ số tỷ lệ:

$$N = \frac{1}{3} \tag{1.48}$$

được gọi là hệ số khử từ của vật hình cầu.

1.8 Thế từ của hình trụ bị từ hóa đồng nhất

Nếu giả thiết rằng hình trụ bị từ hóa đồng nhất dọc theo trục của nó, thì trên các mặt đáy thành phần pháp tuyến J_n của véctơ từ hóa $\vec{J}$ đồng nhất và bằng chính vectơ $\vec{J}$. Vì vậy để thuận tiện cho việc tìm thế từ, ta sử dụng phương trình (1.46). Tại điểm ngoài P phương trình đó có dạng:

$$U = \frac{J}{4\pi}\int\frac{dS}{r_1} - \frac{J}{4\pi}\int\frac{dS}{r_2}$$

Trong đó tích phân đầu lấy theo mặt đáy thứ nhất, tích phân sau lấy theo mặt đáy thứ hai.

Trong trường hợp tổng quát, tức là đối với một điểm bất kỳ của không gian, tích phân không thể tính được dưới dạng các hàm số đơn giản, vì vậy ta chỉ giới hạn khảo sát thế tại các điểm nằm trên trục của hình trụ. Giả sử bán kính trụ bằng a, độ dài l và khoảng cách từ điểm

P đến mặt S_1 gần nhất bằng R, lúc đó, nếu gọi ρ là khoảng cách từ yếu tố mặt dS đến tâm 0, thì thế từ của mặt đáy thứ nhất sẽ là:

$$U_1 = \frac{J}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\rho d\theta d\rho}{\sqrt{R^2+\rho^2}} = \frac{1}{2}J\left(\sqrt{R^2+a^2}-R\right)$$

Biểu thức thế từ do mặt đáy thứ hai gây ra cũng có dạng tương tự, trong đó R được thay bằng R + l. Vì vậy thế tại điểm nằm ngoài được tính bằng công thức:

$$U = \frac{1}{2}J\left[\sqrt{R^2+a^2}-\sqrt{(R+l)^2+a^2}+l\right] \tag{1.49}$$

Tại điểm trong P, rõ ràng là thế từ được biểu diễn bằng công thức:

$$U_1 = \frac{1}{2}J[\sqrt{R^2+a^2}+\sqrt{(l+R)^2+a^2}-2R] \tag{1.50}$$

1.9 Thế từ của elipxôit (ellipsoid)

Ta tìm thế từ của elipxôit theo lý thuyết Poisson, vì thế trọng lực của nó tại điểm ngoài P, với tọa độ x, y, z đã tính được và được biểu diễn theo công thức sau:

$$V = \frac{\pi abc}{1}\int\left(1-\frac{x^2}{a^2+\theta}-\frac{y^2}{b^2+\theta}-\frac{z^2}{c^2+\theta}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}}$$

trong đó a, b, c là các bán trục của elipxôit,

$$\varphi(\theta) = \left(a^2+\theta\right)\left(b^2+\theta\right)\left(c^2+\theta\right),$$

còn η là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2+\eta}+\frac{y^2}{b^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta} = 1 \tag{1.51}$$

Đầu tiên chúng ta tìm thế từ trên mặt elipxôit. Trong trường hợp này, nghiệm của phương trình (1.51) η = 0, vì vậy thế trọng lực sẽ là

$$V = -\pi abc\int_0^{\infty}\left(\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z}{c^2+\theta}\right)\frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}}+\phi$$

Có thể viết lại biểu thức này dưới dạng

$$V = -\frac{1}{2}[Lx^2+My^2+Nz^2]+\phi$$

trong đó L, M, N và ϕ là các đại lượng không đổi được biểu diễn qua các tích phân eliptic.

$$L = 2\pi abc\int_0^{\infty}\frac{d\theta}{\left(a^2+\theta\right)\sqrt{\varphi(\theta)}}$$

$$M = 2\pi abc\int_0^\infty \frac{d\theta}{\left(b^2 + \theta\right)\sqrt{\varphi(\theta)}}$$

$$N = 2\pi abc\int_0^\infty \frac{d\theta}{\left(c^2 + \theta\right)\sqrt{\varphi(\theta)}}$$

$$\phi = \pi abc\int_0^\infty \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}} \quad (1.52)$$

Do đó thế từ trên mặt elipxôit sẽ có dạng:

$$U = \frac{1}{4\pi}\left(J_x Lx + J_y My + J_z Nz\right) \quad (1.53)$$

Trong đó các tích số Lx, My, Nz là các thành phần của lực hấp dẫn do elipxôit gây ra.

Thế từ của elipxôit tại điểm nằm ngoài theo định lý Poisson cũng có dạng:

$$U = \frac{1}{4\pi}\left(J_x f_x + J_y f_y + J_z f_z\right)$$

trong đó f_x, f_y, f_z cũng là các thành phần của thế hấp dẫn tại điểm ngoài P. Để tìm các lực này qua điểm P, ta vẽ elipxôit khác có cùng các tiêu điểm với elipxôit cho trước, với cùng mật độ như mật độ của elipxôit cho trước, theo định luật Maclorain, lực hấp dẫn của các elipxôit, tỷ lệ với các thể tích của chúng, tức là:

$$\frac{f_x'}{f_x} = \frac{f_y'}{f_y} = \frac{f_z'}{f_z} = \frac{a_1 b_1 c_1}{abc}$$

trong đó a_1, b_1, c_1 là các bán trục và f_x', f_y', f_z' là các thành phần của lực hấp dẫn của elipxôit được vẽ thêm.

Vì điểm P nằm trên mặt elipxôit được vẽ thêm nên tương ứng với công thức (1.53)

$$f'_x = L_1 x; \quad f'_y = M_1 y \text{ và } f'_z = N_1 z$$

Trong đó L_1, M_1 và N_1 là các đại lượng không đổi, được xác định bằng các công thức (1.52) mà trong đó các bán trục a, b, c được thay bằng các bán trục a_1, b_1, c_1

Do đó:

$$f_x = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} L_1 x,$$

$$f_y = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} M_1 y,$$

$$f_z = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1} N_1 z$$

Từ đó

$$U_e = \frac{abc}{4\pi a_1 b_1 c_1}\left[J_x L_1 x + J_y M_1 y + J_z N_1 z\right] \quad (1.54)$$

Do tính chất của elipxôit được vẽ thêm, các bán trục a_1, b_1, c_1 được xác định từ các điều kiện sau:

Điều kiện thứ nhất:

$$\begin{aligned} a_1^2 - b_1^2 &= a^2 - b^2 = q_1^2; \\ a_1^2 - c_1^2 &= a^2 - c^2 = q_2^2 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Điều kiện thứ hai:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \quad (1.56)$$

Các phương trình này được dùng để tìm các bán trục a_1, b_1, c_1 đó.

1.10 Các đạo hàm của thế từ và sự liên hệ giữa chúng

Cường độ cực đại của trường từ theo hướng thẳng góc với mặt đẳng thế đi qua điểm cho trước liên hệ với thế từ U bằng biểu thức:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}U} \\ \vec{B} &= -\mu_0 \overrightarrow{\mathrm{grad}U} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Đối với trường từ dị thường, cường độ này được biểu diễn qua T_a. Nó thay đổi từ điểm này qua điểm khác không những theo môđun mà còn theo hướng, hướng này trùng với hướng đường sức của trường từ. Trong tính toán, để cho thuận tiện, người ta dùng các thành phần của véctơ đó trong hệ thống tọa độ cho trước. Trong trường hợp tổng quát cường độ trường từ theo hướng của véctơ đơn vị λ bằng

$$B_\lambda = -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{T}_a \vec{\lambda} = \vec{T}_a \cos\left(\vec{T}_a, \vec{\lambda}\right). \quad (1.58)$$

Trong thăm dò từ, các hệ thống tọa độ khác nhau được sử dụng. Trong hệ thống tọa độ vuông góc, trục Oz thông thường hướng xuống dưới, trục Ox có hướng trùng với kinh độ địa từ, còn trục Oy hướng về phía phải của trục Ox. Trong hệ thống toạ độ đó:

$$H_0 = T_0 \cos I_0 \qquad Z_0 = T_0 \sin I_0 \quad (1.59)$$

trong đó I_0 là góc từ khuynh bình thường

Trong địa từ, người ta dùng hệ thống tọa độ địa lý với trục Ox trùng với kinh tuyến hướng lên phía bắc. Các thành phần của cường độ trường địa từ bình thường X_0, Y_o, Z_0 trong hệ thống tọa độ đó (giả thiết rằng $i = I_0$, $\delta = D_0$) sẽ là:

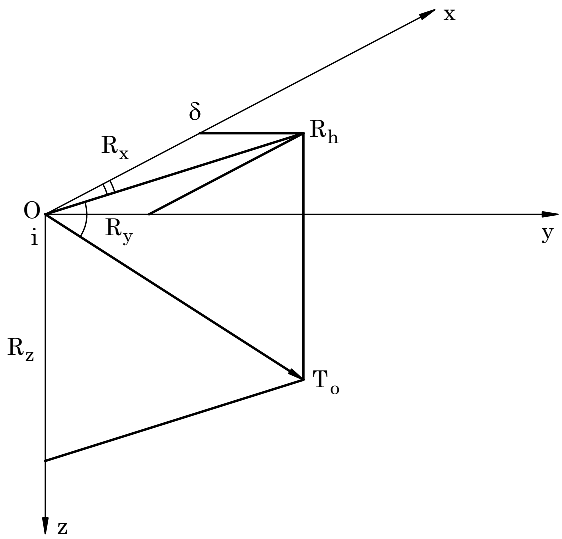
$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 \cos D_0 = T_0 \cos I_0 \cos D_0 \\ Y_0 &= H_0 \sin D_0 = T_0 \cos I_0 \sin D_0 \\ Z_0 &= T_0 \sin I_0^- \end{aligned} \quad (1.60)$$

Trên hình 1.4 người ta biểu diễn các thành phần của trường từ địa phương trong hệ thống toạ độ kể trên. Trong trường hợp này để cho đơn giản người ta cho:

$$R_h = H_0,\; R_x = R_0,\; R_y = Y_0,\; R_x = X_0$$

Các giá trị dị thường của trường từ thu được bằng cách lấy hiệu giữa giá trị đo được của trường với giá trị trường bình thường.

Các biểu thức tương tự đối với các thành phần cường độ trường từ trong hệ tọa độ địa phương có thể thu được từ các biểu thức (1.60) mà trong đó thay cho góc D người ta dùng góc δ phương vị từ của trục Ox. Hệ tọa độ này rất thuận lợi để khảo sát các dị thường từ hai chiều. Trong trường hợp đó trục Ox được đặt trùng với phương thẳng góc với đường phương của dị thường. Thành phần H_a trùng với thành phần trên trục Ox, còn thành phần theo trục Oy bằng không. Hình chiếu của véctơ T_0 trên mặt phẳng xOz được xác định bằng góc i, góc này liên hệ với độ từ khuynh I_0 và phương vị từ của tuyến δ bằng công thức sau:



Hình 1.4

Các thành phần trường địa phương

$$\mathrm{ctg}\,i = \mathrm{ctg}\,I_0 \cos\delta \tag{1.61}$$

Các từ kế hiện đại có độ chính xác cao đo được hoặc hiệu số ΔT giữa giá trị của môđun T tại điểm cho trước và tại điểm, được gọi là điểm tựa (khi đo từ hàng không, trên tuyến tựa), hoặc môđun T tại mỗi điểm quan sát. Trong trường hợp sau người ta thu được giá trị ΔT khi tu chỉnh các kết quả đo được. Trong thăm dò từ người ta thường nghiên cứu các dị thường từ. Dị thường này được ký hiệu bằng $(\Delta T)_a$. Giá trị này được xác định từ tam giác các véctơ (Hình 1.5)

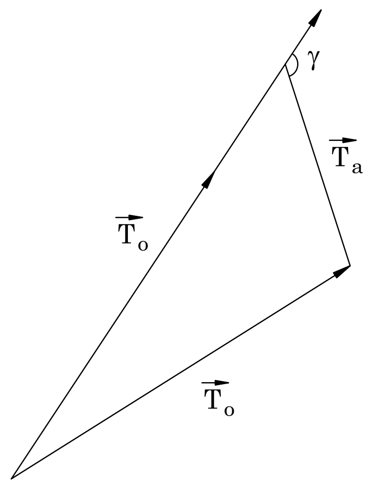
$$(\Delta T)_a = |T_s| - |T_0| \tag{1.62}$$

Trong tam giác này:

$$T_a = \sqrt{T_0^2 + T_a^2 + 2T_0 T_a \cos\gamma}$$

trong đó γ là góc giữa hướng trường địa từ bình thường và T_a. Nếu đặt giá trị T_s này vào trong biểu thức (1.62) và cho T_0 ra khỏi dấu ngoặc, ta có (Hình 1.5):

$$(\Delta T)_a = T_0\left[\sqrt{1+(T_a/T_0)^2 + 2(T_a/T_0)\cos\gamma} - 1\right] \tag{1.63}$$



Hình 1.5

Dị thường từ

Khi $T_a << T_0$ có thể bỏ qua số hạng $\left(\frac{T_a}{T_0}\right)^2$ trong biểu thức đó. Khai triển các số hạng còn lại theo nhị thức Newton và chỉ giới hạn đến số hạng lũy thừa bậc nhất của $\frac{T_a}{T_0}$ ta thu được:

$$(\Delta T)_a = T_a \cos\gamma \tag{1.64}$$

Biểu thức thức này chứng tỏ rằng với những giá trị không lớn $|T_a|$ thành phần dị thường $(\Delta T)_a$ là hình chiếu T_a trên hướng trường bình thường tức là đạo hàm của thế từ theo hướng trường bình thường. Vì hướng này không đổi nên có thể xem nó như hàm thế Z_a, X_a, và Y_a. Trong hệ thống tọa độ với trục 0x trùng với H_0,

$$\begin{aligned}(\Delta T)_a &= H_a \cos I_0 \cos\delta + Z_a \sin I_0 \\ &= X_a \cos I_0 + Z_a \sin I_0\end{aligned} \tag{1.65}$$

trong đó δ là phương vị từ của H_a

Hình chiếu của Y_a trên T_0 luôn bằng không.

Trong các đạo hàm hạng cao của thế từ ta có thể đo trực tiếp các đạo hàm bậc hai - gradient của cường độ từ trường

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},\ \ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z},\ \ \frac{\partial^2 U}{\partial i \partial x},\ \text{và}\ \frac{\partial^2 U}{\partial i \partial z}$$

Chỉ số i biểu thị vi phân theo hướng trường bình thường. Bằng tính toán ta có thể thu được các đạo hàm bậc ba (các đạo hàm bậc hai của Z hoặc ΔT).

Ngoài các đại lượng vật lý đã được khảo sát, khi tính toán và phân tích các dị thường từ đối với các vật thể hai chiều đôi khi người ta còn dùng thế từ, cường độ trường, hoặc gradient phức.

Thế từ phức U_k thu được từ các công thức tương ứng của thế từ trong điều kiện của bài toán hai chiều và trong các công thức đó thay độ từ hóa J và khoảng cách r bằng các biến phức:

$$J = J_x + i J_z, \qquad r = x + i y \tag{1.66}$$

Cường độ trường từ phức B_k được tạo thành từ hai hàm liên hiệp phức H và Z vì:

$$B_k = H + i Z \tag{1.67}$$

hoặc

$$B_k = Z + i H \tag{1.68}$$

phụ thuộc vào hướng của các trục tọa độ. Khác với thế từ thường, thế phức có ý nghĩa vật lý (trường toàn phần), vì trên mặt phẳng các đại lượng phức có thể được xem như là các véctơ.

Nếu đưa hàm điều hòa $(\Delta T)^*_a$, liên hợp với cường độ trường đo được $(\Delta T)_a$, véctơ $(\Delta T)_a^*$ thẳng góc với hướng trường bình thường còn $(\Delta T)_a$ trùng với trường bình thường, ta có thể thu được biểu thức của trường phức

$$B_k = (\Delta T)_a + i(\Delta T)_a^* \tag{1.69}$$

Có thể thực hiện các toán tử đó đối với các gradient

$$\frac{\partial Z}{\partial x}\ \text{và}\ \frac{\partial Z}{\partial z},\ \frac{\partial \Delta T}{\partial x}\ \text{và}\ \frac{\partial \Delta T}{\partial z}$$

và vân vân.

1.11 Những đặc tính cơ bản của hàm số thế (điều hòa)

1.11.1 Định nghĩa về các hàm điều hòa và thế. Sự liên hệ giữa các hàm điều hòa với các hàm giải tích

Như ta đã biết từ lý thuyết các hàm số thế, một hàm số hai lần khả vi thỏa mãn phương trình Laplace được gọi là hàm điều hòa.

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{1.70}$$

hàm này phải điều hòa tại vô cùng, tức là phải được thỏa mãn bất đẳng thức sau:

$$\left|U(r)\right| \le \frac{c}{|r|^{m-2}} \tag{1.71}$$

khi r nhận giá trị lớn. Trong trường hợp này r là khoảng cách từ gốc tọa độ tới điểm quan sát, còn m là thứ nguyên của không gian Euclide. Trong miền hai chiều (m = 2), từ điều kiện (1.71) ta có thể suy ra rằng hàm điều hòa tại vô cùng bị giới nội (khi $r \to \infty$). Đối với miền ba chiều (m=3) hàm tại vô cùng tiến tới không.

Hàm số thế với quan điểm vật lý là hàm vô hướng của các tọa độ, gradien (H) của nó xác định cường độ trường toàn phần của trường véc tơ cần nghiên cứu (trường trọng lực, trường từ v.v...)

$H = -\text{grad}U$

Hàm số thế thỏa mãn phương trình Laplace trong miền điều hòa của mình.

Nhắc lại việc biểu diễn phương trình Laplace trong hệ thống tọa độ cầu và trụ:

Trong tọa độ cầu:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{1.72}$$

Trong tọa độ trụ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \tag{1.73}$$

Từ phương trình (1.72) ta có thể dễ dàng giải phương trình Laplace trong trường hợp có đối xứng cầu, tức là khi hàm cần tìm chỉ phụ thuộc vào một tọa độ r, lúc đó phương trình trên có dạng

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dU}{dr}) = 0$$

từ đó

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Với nghiệm thu được nếu giả thiết rằng $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, ta có nghiệm cơ bản của phương trình Laplace ở trong không gian

$$U_0 = \frac{1}{r} \tag{1.74}$$

Với độ chính xác đến một thừa số nhân, nghiệm này trùng với thế của một chất điểm hoặc của một diện tích điểm đặt ở gốc tọa độ.

Bằng cách tương tự, từ phương trình (1.73) ta có thể thu được nghiệm cơ bản của phương trình Laplace cho trường hợp hàm cần tìm có tính chất đối xứng trụ. Trong trường hợp này nghiệm sẽ là:

$$U_0 = \ln\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.75}$$

Với độ chính xác đến một thừa số nhân, nghiệm này trùng với thế của một sợi vật chất mảnh hoặc sợi các cực mảnh có mật độ dài không đổi đặt song song với trục Oy (thẳng góc với ρ).

Trong trường hợp bài toán phẳng (m=2), để nghiên cứu các hàm điều hòa một cách hữu hiệu người ta dùng công cụ lý thuyết hàm giải tích mà ta hiểu như là hàm biến phức liên tục và khả vi. Như đã được chứng minh trong lý thuyết của các hàm giải tích, phần thực và phần ảo của hàm giải tích.

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{1.76}$$

trong đó z = x + iy là các hàm điều hòa thỏa mãn phương trình Laplace. Để cho hàm f(z) là hàm điều hòa thì các hàm số φ(x,y) và ψ(x,y) phải là các hàm liên hợp, tức là chúng cần phải liên hệ với nhau bằng các phương trình Cauchy-Riman

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1.77}$$

1.11.2 Tiếp tục giải tích

Một đặc điểm quan trọng nhất của các hàm giải tích là khả năng tiếp tục giải tích mà lần đầu tiên Riman đã chứng minh được.

Ta hãy viết chuỗi các hàm lũy thừa

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + ... + c_n(z - z_0)^n \tag{1.78}$$

trong đó $c_0, c_1, ..., c_n$ là các đại lượng phức. Dùng dấu hiệu Cauchy ta có thể xác định được tính hội tụ của chuỗi.

Theo dấu hiệu đó, chuỗi sẽ hội tụ khi

$$\sqrt{\left|c_n\left(z - z_0{}^n\right)\right|} = \left|z - z_0\right|\sqrt[n]{\left|c_n\right|} < 1 \quad 1$$

Nếu biểu diễn qua Λ là cận trên của dãy $\sqrt[n]{|c_n|} < 1$

$$\Lambda = \sup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|C_n|}$$

thì ta có thể khẳng định được rằng chuỗi (1.78) hội tụ với mọi giá trị của z khi Λ= 0, còn khi Λ≠ 0 hội tụ khi $|z - z_0| < 1/\Lambda$ (định luật Cauchy Adamar). Đại lượng 1/Λ được gọi là bán kính hội tụ và xác định vòng tròn bao quanh điểm z mà trong phạm vi của nó chuỗi các hàm lũy thừa hội tụ tuyệt đối. Trong giới hạn của vòng tròn đó chuỗi (1.78) là chuỗi Taylor mà các hệ số c_0, c_1... c_n được xác định qua các giá trị của f(z) và các hàm đạo hàm của nó.

$$c_n = \frac{f^n(z)}{n!}$$

Nhờ có chuỗi Taylor, ta có thể thu được giá trị tiếp tục giải tích của hàm f(x) cho trước trên trục thực trong khoảng [a, b] vào trong miền các giá trị phức của các biến. Hàm f(x) tại lân cận của điểm x: $x - \delta < x < x+\delta$ mà trong đó nó là hàm giải tích có thể được biểu diễn bằng chuỗi Taylor với các hệ số thực:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \tag{1.79}$$

chuỗi

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

là giá trị tiếp tục giải tích của hàm số đó trong miền D của mặt phẳng biến số phức chứa đoạn [a,b] với điều kiện là trên đoạn này F(z) = f(x). Chuỗi này sẽ hội tụ trong vòng tròn $c(\delta, x_x)$ với bán kính $|z - x_0 < \delta|$.

Nếu cho f(z) trong biểu diễn (1.78) bằng không ta thu được nghiệm của hàm giải tích như là nghiệm của phương trình đó. Từ phương trình (1.78) ta suy ra rằng khi z là nghiệm của hàm f(z), số hạng tự do của chuỗi đó sẽ là $c_0 = f(z_0) = 0$. Giả sử k là giá trị bé nhất trong các hệ số khác không ($k \geq 1$). Trong trường hợp đó biểu thức (1.78) có thể viết dưới dạng sau:

$$f(z) = c_k (z - z_0)^k + c_{k+1} (z - z_0)^{k+1} \tag{1.80}$$

Số k xác định độ bội nghiệm (khi k=1 ta gọi đó là nghiệm đơn)

Cùng với biểu thức vi phân (1.14) đối với chuỗi Taylor còn có biểu thức tích phân mà Cauchy đã thu được.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad n = 0,1\ 2,\ \ .... \tag{1.81}$$

Trong đó C là một vòng tròn nào đó có tâm tại z nằm trong miền hội tụ sử dụng biểu thức này từ chuỗi các hàm số lũy thừa ta có thể đưa ra được công thức tích phân Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta \tag{1.82}$$

Công thức này cho ta giá trị của f(z) tại một điểm trong của vòng dây tròn c_δ qua các giá trị của hàm số đó trên mặt ranh giới của nó $|\zeta - z_0| = \sigma$. Tích phân (1.82) có thể được phát triển ra cho biến của bất kỳ vòng tròn nào khác ở trong miền D mà trong đó hàm f(z) đơn trị và khả vi. Đối với những điểm nằm trên chính đường tròn, hàm số dưới dấu tích phân không được xác định. Trong vòng tròn Γ tích phân Cauchy có đạo hàm ở tất cả mọi hạng:

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\left((\zeta - z)^{n+1}\right)} d\zeta\,. \tag{1.83}$$

Điều đó có nghĩa là hàm giải tích có đạo hàm ở tất cả mọi hạng đồng thời các đạo hàm đó cũng là các hàm giải tích trong miền D.

Sử dụng các biểu thức (1.81) và tính giới nội của tích phân ta có thể đánh giá các môđun của các hệ số trong chuỗi Taylor:

$$\left|c_n\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^{n+1}}2\pi R = \frac{M}{R^n} \qquad (1.84)$$

trong đó R là bán kính của vòng tròn hội tụ.

Từ biểu thức (1.84) ta có định lý Liuvil mà theo đó hàm số giải tích trên toàn bộ mặt phẳng z bị giới hạn theo môđun sẽ bằng hằng số (Khi $R \to \infty$ hệ số c_n khi $n \to 0$ bằng không, từ đó $f(z) = c_0 = \text{const}$).

Nếu miền giải tích của hàm số f(z) không phải là vòng tròn, thì hàm số đó sẽ có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi Lauran.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \qquad (1.85)$$

Chuỗi này được biểu diễn qua tổng của hai chuỗi

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k \qquad (1.86)$$

Chuỗi đầu tiên đã được khảo sát ở trên. Chuỗi này hội tụ trong vòng tròn có bán kính $|z - z_0| < R$ và được gọi là phần điều hòa của khai triển Lauran. Chuỗi thứ hai chứa các lũy thừa âm của $(z - z_0)$ được gọi là phần chính hoặc là phần điều hòa của khai triển Lauran. Ta có thể biến đổi khai triển này thành khai triển Taylor nếu đặt $t = 1 / (z - z_0)$ lúc đó thay cho chuỗi (1.86) ta thu được:

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z-z_0) + f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}(z-z_0)^{-k} \end{aligned} \qquad (1.87)$$

Chuỗi $f_2\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ hội tụ trong khoảng $\left[\frac{1}{R}, \frac{1}{r}\right]$ của các giá trị t, và do đó, theo định lý Abel hội tụ trong vòng tròn $|t| < \frac{1}{r}$.

Từ đó suy ra rằng chuỗi thứ hai trong biểu thức (1.87) hội tụ khi $|z - z_0| > r$, tức là trong miền ngoài đối với vòng tròn $|z - z_0| = r$. Miền hội tụ chung cho cả hai chuỗi là hình vành khăn $|r| \le |z - z_0| \le R$.

Khai triển thành chuỗi Lauran có tính chất duy nhất.

Trong trường hợp riêng, r có thể bằng không và lúc đó thay cho hình vành khăn người ta khảo sát vòng tròn hội tụ R có tâm bị tách ra. Các hệ số c_k trong triển khai thành chuỗi Lauran được xác định bằng tích phân Cauchy.

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\zeta \qquad k=0\ , \pm 1\ , \pm 2... \qquad (1.88)$$

Khi đó đường Γ cần phải nằm trong hình vành khăn với các bán kính trong ngoài là r và R.

1.11.3 Các điểm đặc biệt của hàm số giải tích

Các điểm mà tại đó hàm không còn tính giải tích được gọi là các điểm đặc biệt cô lập của hàm giải tích f(z) trong miền D. Phụ thuộc vào tính chất của hàm f(z) xung quanh điểm đặc biệt mà người ta phân các điểm đặc biệt thành các điểm đặc biệt có thể triệt tiêu được và các điểm đặc biệt thực.

Điểm đặc biệt a được gọi là triệt tiêu được khi

$$\lim_{z->a} f(z) = c \quad \text{(giới nội)}$$

Còn điểm cực

$$\lim_{z->a} f(z) = \infty \tag{1.89}$$

Điểm đặc biệt thực là điểm không có giới hạn. Các hàm điều hòa không có các điểm đặc biệt này.

Cần phải nhấn mạnh rằng xung quanh điểm cực hàm giải tích có thể đơn trị hoặc đa trị. Đối với hàm đơn trị việc tiếp tục giải tích theo một đường kín bất kỳ trong miền $|z - a| < R$ không thay đổi giá trị của nó, còn đối với hàm đa trị có thể tiến tới điểm xuất phát trên mặt phẳng f(z) chỉ sau khi quay k vòng trên mặt phẳng của biến độc lập z. Ví dụ hàm f(z) = $\sqrt[n]{z}$ tương ứng với z_0 có n giá trị $f(z_0)$ với cùng một môđun bằng giá trị căn số nhưng với argument khác nhau 2π /n. Vì vậy trên mặt phẳng f(z) ta rơi vào cùng một điểm sau khi đã vòng n vòng $|z-a|$ (cực của hàm này a = 0). Đối với hàm lnz có vô số các giá trị.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{1.90}$$

Khi đi vòng theo đường tròn $|z-a|$ (cực của hàm này a=0), nói chung ta không thể quay trở về điểm xuất phát $f(z_0)$. Những điểm đặc biệt như vậy được gọi là các điểm đặc biệt nhánh của các hàm giải tích.

Hệ số c_{-1} của $(z - a)^{-1}$ trong khai triển Lauran được gọi là thặng dư của hàm số f(z) đối với điểm đặc biệt a và được biểu diễn bằng res f (a) hoặc res_a f(z). Tương ứng với biểu thức (1.88)

$$\mathrm{res} f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} f(z) ds \tag{1.91}$$

Tại điểm đặc biệt có thể hủy bỏ được res f(a) bằng không. Thặng dư tại điểm cực hạng n được xác định bằng công thức:

$$\mathrm{res}(a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)] \tag{1.92}$$

Đối với điểm cực hạng một

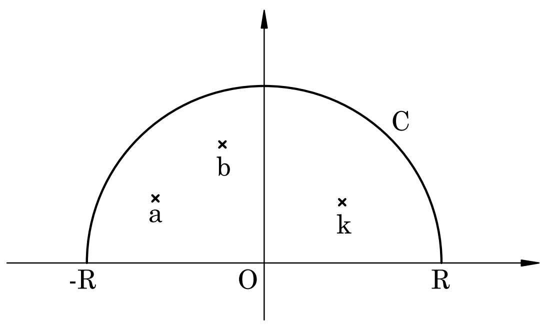
$$\mathrm{res}(a) = \lim_{z\to a}[(z-a) f(z)] \tag{1.93}$$

Từ biểu thức (1.91) ta suy ra rằng tích phân theo đường kín bao quanh điểm đặc biệt, không bằng không. Khi trong vòng Γ có một vài điểm đặc biệt thì theo định lý Cosi

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz = ... = \oint_{\gamma_m} f(z)dz = \qquad (1.94)$$
$$= 2\pi i\left[res_1 f(z) + ... + res_n f(z)\right]$$

Việc sử dụng công thức (1.94) đối với hàm f(z) mà một vài điểm đặc biệt của nó nằm cao hơn trục thực (Hình 1.6) có thể có giá trị thực tế. Vẽ nửa đường tròn với tâm O mà các điểm đặc biệt rơi vào đó, ta có thể viết:

$$\oint_c f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\Gamma_R} f(z)dz \qquad (1.95)$$



Hình 1.6

Chứng minh công thức (1.96)

Trong đó chỉ có số R ở tích phân thứ nhất có nghĩa là tích phân được tính dọc theo đường tròn khi mà f(z) trong nửa không gian trên tiến tới không nhanh hơn 1/z. Điều kiện đó có thể được viết dưới dạng f(z) = α(z)/z, trong đó $\alpha \to 0$ khi $z \to \infty$.

Tích phân thứ hai trong biểu thức (1.95) tiến tới không vì môđun của nó có thể được làm cho bé tùy ý khi $|\alpha(z)| < \varepsilon$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma_R} \frac{\alpha(z)}{z} dz\right| \le \frac{\varepsilon}{R}\pi R = \pi\varepsilon$$

Tương ứng với (1.95) thay các cận ± R trong tích phân đầu tiên ở trong vế phải bằng ± ∞ ta thu được.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i[res_a f(z) + ... + res_k f(z)] \qquad (1.96)$$

ở đây f (z) là giá trị tiếp tục giải tích của f(x)

1.11.4 Các biểu thức tổng quát của trường thế, các đặc điểm của hàm số thế

Trong lý thuyết thế người ta chia ra thành thế của lớp đơn giản

$$U = \iint_S \frac{\sigma dS}{r} \qquad (1.97)$$

và thế của lớp kép

$$U = \iint_S \frac{\mu \cos \varphi}{r} dS \qquad (1.98)$$

thế Newton hoặc thế khối

$$U = \iiint_V \frac{\rho dV}{r} \qquad (1.99)$$

Trong các biểu thức đó

$$r = \sqrt{\left((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\right)}$$

trong đó x, y, z là tọa độ của điểm mà tại đó người ta tính thế (điểm ngoài), ξ, η, ζ của điểm trên mặt S hoặc trong khối V, tại đó có nguồn thế, φ là góc giữa $\vec{r}$ và pháp tuyến ngoài với mặt S (Hình 1.7), σ(ξ, η, ζ) và μ (ξ, η, ζ) là mật độ của lớp đơn hoặc lớp kép, ρ (ξ, η, ζ) là mật độ khối (mật độ thể tích dm/dv).

Nếu m là hàm không khả vi của tọa độ thì biểu thức (1.99) biến thành tích phân $U = \iiint_V \frac{dm}{r}$

Trong mô hình hai chiều khi mà sự phân bố của khối lượng chỉ phụ thuộc vào hai tọa độ ξ và ζ, các biểu thức (1.97) và (1.98) biến thành

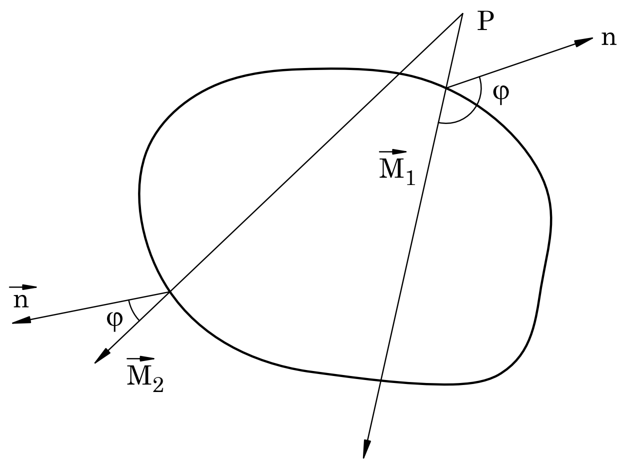
$$U = \int_C \sigma' \ln \frac{1}{r} dl \qquad (1.100)$$

$$U = \iint_S \sigma' \ln \frac{1}{r} dS \qquad (1.101)$$

trong đó tích phân được thực hiện tương ứng với vòng C và diện tích S. Các thế như vậy được gọi là các thế loga.

Từ biểu thức

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cos(n, r) = \cos \varphi \qquad (1.102)$$



Hình 1.7

Tính các biểu thức thế

ta suy ra rằng

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\cos\varphi}{r^2} \qquad (1.103)$$

Thế lớp đơn trên mặt S có giá trị giới nội mặc dù trong miền tích phân khi ξ=x, η= y, ζ = z hàm số dưới dấu tích phân biến thành vô cùng cũng như khi cho điểm P tiến đến vô cùng. Nếu có điều kiện khi mà trên mặt S chỉ có các khối cùng một dấu thì tích phân tiến tới không giống như hàm $\frac{1}{r}$. Khi đó $\lim_{r\to\infty} rU = M$, trong đó M là toàn bộ khối lượng của lớp. Nếu có hiện tượng đổi dấu trong sự phân bố khối lượng trên mặt S thì M=0 nên $\lim_{r\to\infty} rU = 0$

Thế Newton giữ nguyên tính điều hòa trong miền chứa nguồn có đặc điểm như vậy.

Thế lớp kép liên tục trong toàn không gian ngoại trừ các điểm thuộc mặt S. Khi chuyển qua mặt này giá trị của thế gián đoạn.

Thế Newton trong trường hợp tổng quát thỏa mãn phương trình Poisson.

$$\Delta U = -4\pi\rho \qquad (1.104)$$

Tại miền không có nguồn ρ = 0 phương trình trên trở thành phương trình Laplace.

ΔU=0.

Gradient của thế U hướng dọc theo pháp tuyến với mặt mức C đi qua điểm P điểm mà tại đó ta tính gradient, và về mặt vật lý là giá trị cường độ toàn phần của trường tại điểm đó. Gradient của U được biểu diễn qua các thành phần cường độ theo các trục tọa độ H_x, H_y, H_z theo cách như sau:

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(n,z)$$

(1.105)

Khoảng cách Δn giữa các mặt mức mà giá trị hàm thế khác nhau một lượng ΔC được biểu diễn qua gradient của U dưới dạng sau:

$$\Delta n = \frac{\Delta C}{|\mathrm{grad}U|}$$

Từ đó ta suy ra rằng khi gradient tăng, khoảng cách giữa các mặt đẳng thế giảm

Thông lượng của gradient của thế qua mặt kín mà trong đó không có nguồn bằng không

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0 \tag{1.106}$$

Khi mặt bao quanh nguồn

$$\iint_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 4\pi M \tag{1.107}$$

trong đó M là toàn bộ khối của nguồn nằm trong mặt S.

Đối với các hàm số, ta có định lý Gauss về giá trị trung bình như sau:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} U dS \tag{1.108}$$

Theo định lý này giá trị của hàm thế tại điểm P_o bằng tích phân của hàm số đó trên mặt cầu bán kính r có tâm tại điểm P_o với điều kiện là trong mặt đó không có nguồn tạo ra thế.

Từ định lý này ta suy ra rằng trong miền D hàm U điều hòa

(Đạo hàm theo pháp tuyến của hàm thế $\frac{\partial U}{\partial n}$ gián đoạn trên mặt của lớp đơn, còn đạo hàm bậc hai theo r của thế Newton $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ lại gián đoạn khi đi qua mặt ranh giới chứa các khối thể tích với mật độ ρ). Các giá trị cực đại và cực tiểu chỉ có thể có được tại các điểm trên mặt giới hạn miền đó.

Đối với các hàm thế Newton loga (1.101), phương trình Poisson có dạng

$$\Delta U = -2\pi\rho' U \tag{1.109}$$

Khi cắt qua ranh giới chứa nguồn thì có một trong các đạo hàm bậc hai của thế loga gián đoạn. Khác với thế khối, thế loga không tiến tới không tại vô cùng mà tại đó thế loga có những đặc điểm riêng.

Nhờ có công thức Green mà người ta có thể đưa ra được phương trình biểu diễn thế U tại điểm P qua thế Newton và thế của lớp đơn và lớp kép

Với hai hàm thế vô hướng U và V, công thức Green có dạng sau:

$$\int_V (U\Delta V + (\frac{\partial U}{\partial n}.\frac{\partial V}{\partial n})dV = \int_S U\frac{\partial V}{\partial n} dS \tag{1.110}$$

$$\int_V (U\Delta V - V\Delta U)dV = \int_S (U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n})dS \qquad (1.111)$$

1.12 Về thứ nguyên và đơn vị dùng trong giáo trình này

Trong giáo trình các đơn vị được sử dụng trong hệ SI. Trong hệ này có bốn đơn vị cơ bản: Khối lượng (M), độ dài (L), thời gian (T), cường độ dòng điện (I) tương ứng là kg, m, s, A. Trong hệ thống này thứ nguyên của một số đại lượng chính được trình bày trong bảng (1.1)

Bảng 1.1

Đại lượng vật lý	Ký hiệu	Thứ nguyên	Đơn vị
Cường độ điện trường	E	$MLT^{-3}I^{-1}$	V/m
Cảm ứng từ	B	$MT^{-2}I^{-1}$	Tesla(W_b/m)
Cường độ từ trường	H	$L^{-1}I$	A/m
Cảm ứng điện	D	$L^{-2}TI$	C/m^2
Mật độ dòng điện	j	$L^{-2}I$	A/m^2
Mật độ điện tích khối	ρ	$L^{-3}TI$	C/m^3
Độ dẫn điện	σ	$M^{-1}L^{-3}T^3I^2$	$\Omega^{-1}m^{-1}$
Độ điện thẩm	ε_o	$M^{-1}L^{-3}T^4I^2$	F/m
Độ từ thẩm	μ_o	$MLT^{-2}I^{-2}$	H/m

Trong môn địa từ, từ trước đến nay người ta thường quen sử dụng các đơn vị điện từ CGS (CGSE và CGSM), vì vậy việc đưa vào hệ thống đơn vị SI mới có gặp một số chống đối nhất định. Lý do là trong hệ điện từ CGS giá trị của các véctơ B và H chỉ khác nhau khi chúng được đo trong các vật liệu từ còn trong không khí chúng có cùng một giá trị, vì trong hệ đơn vị này $\mu_0 = 1$ và không có thứ nguyên; do đó mà các nhà địa từ không cần phải quan tâm là trong các đài vật lý địa cầu của mình H hay B được đo. Trong địa từ, đơn vị đo là gama (γ) với

$$1\gamma = 10^{-5} \text{ Gauss} = 10^{-5} \text{ Oersted}$$

Ngược lại trong hệ SI, μ_0 là một đại lượng có thứ nguyên và có giá trị bằng $4\pi.10^{-7}$ H/m. Trong hệ đơn vị này B và E có vai trò như nhau, vì vậy khi nói về trường từ người ta thường nghĩ đến B. Trong hệ đơn vị này đơn vị đo B là Tesla. Sự liên hệ giữa gama (γ) và Tesla là:

$$1\gamma = 10^{-9} \text{ Tesla} = \text{NanoTesla (nT)}.$$