



Chương 3. Biểu diễn trường từ của quả đất

Tôn Tích Ái

Địa từ và thăm dò từ. NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006.

Từ khoá: Địa từ và thăm dò từ, Trường từ, Gradient, Mômen từ, Cực địa từ, Từ trường xoáy, Điều hòa cầu.

Tài liệu trong Thư viện điện tử ĐH Khoa học Tự nhiên có thể được sử dụng cho mục đích học tập và nghiên cứu cá nhân. Nghiêm cấm mọi hình thức sao chép, in ấn phục vụ các mục đích khác nếu không được sự chấp thuận của nhà xuất bản và tác giả.

Mục lục

Chương 3	Biểu diễn trường từ của quả đất	2
3.1	Trường từ của Quả Đất dưới dạng trường từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất	2
3.1.1	Gradient	5
3.1.2	Mômen từ của Quả Đất	6
3.1.3	Các cực địa từ. Các tọa độ từ.....	7
3.2	Khai triển thế từ của Quả Đất thành chuỗi. Lý thuyết Gauss	8
3.3	Ý nghĩa vật lý của các số hạng trong khai triển Gauss	13
3.4	Phân chia trường từ của Quả Đất ra thành các thành phần "bên trong" và "bên ngoài"	15
3.5	Từ trường xoáy	19
3.6	Phân tích điều hòa cầu và môđun	20
3.6.1	Phân tích điều hòa cầu	20
3.6.2	Phân tích môđun	21

Chương 3

Biểu diễn trường từ của quả đất

3.1 Trường từ của Quả Đất dưới dạng trường từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất

Một trong những nhiệm vụ đầu tiên nhằm nghiên cứu trường của quả đất là biểu diễn bằng giải tích sự phụ thuộc giữa các thành phần của trường đối với tọa độ các điểm trên mặt đất.

Điều này có thể thực hiện được nếu như biết được nguyên nhân gây nên trường từ hoặc như theo lý thuyết thế, biết trước sự phân bố của các yếu tố của trường từ của Quả Đất trên mặt đất. Nếu như biết được sự phụ thuộc hàm số giữa các yếu tố của trường từ của quả đất đối với tọa độ các điểm thì ta có thể giải quyết được một loạt các nhiệm vụ có tính chất khoa học và thực tế.

Năm 1835 dựa trên các số liệu quan sát được, Simônôp đã giả thiết rằng trường từ của quả đất là trường từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất có trục từ đi qua tâm và song song với đường nối các cực từ thực. Như vậy, việc giải bài toán đặt ra bao gồm việc tìm trường của quả cầu bị từ hóa đồng nhất.

Ta hãy khảo sát biểu thức của các yếu tố của trường từ của quả đất, nếu như cho rằng quả đất bị từ hóa đồng nhất.

Từ phần lý thuyết cơ sở ta thấy rằng thế từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất tại điểm P được biểu diễn bằng phương trình:

$$U = \frac{M}{4\pi r^2} \cos \theta \quad (3.1)$$

trong đó θ là góc giữa OQ và hướng bán kính vectơ OP; $OP = r$ (Hình 3.1)

Khi đó trục quay của quả đất ON tạo với trục từ OQ một góc $90 - \varphi_0$. Nối các điểm P, Q, N bằng các cung của vòng tròn lớn, từ tam giác cầu PQN ta tìm được

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

trong đó φ và λ là vĩ độ và kinh độ của điểm P, còn φ_0 và λ_0 là vĩ độ và kinh độ của điểm Q và do đó

$$U = \frac{M}{4\pi r^2} [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)]$$

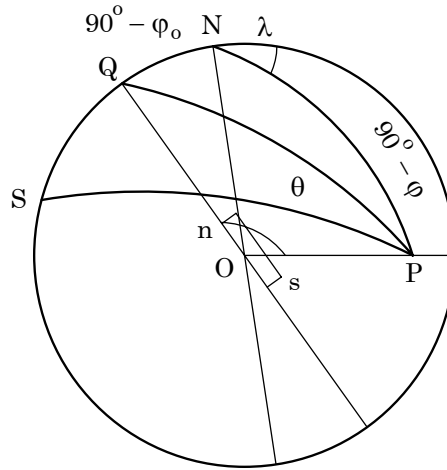
Mômen từ của hình cầu \vec{M} bằng tích thể tích của hình cầu với độ từ hóa \vec{J} của nó, tức là

$$\vec{M} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{J}$$

trong đó R là bán kính của hình cầu

Ta hãy đưa vào các ký hiệu sau:

$$\begin{aligned} g_1^0 &= \frac{4}{3} \pi J \sin \varphi_0 \\ g_1^1 &= \frac{4}{3} \pi J \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ h_1^1 &= \frac{4}{3} \pi J \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \end{aligned} \quad (3.2)$$



Hình 3.1

Thê từ của Quả Đất hình cầu bị từ hoá đồng nhất

Lúc đó

$$U = \frac{R^3}{4\pi r^2} \left[g_1^0 \sin \varphi + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) \cos \varphi \right] \quad (3.3)$$

Vì cung của vòng tròn lớn NP là kinh tuyến của điểm P, nên thành phần trường theo hướng NP là thành phần bắc X, còn thành phần theo hướng của vòng tròn nhỏ PS là vĩ tuyến, nên Y là thành phần đông. Cuối cùng thành phần theo hướng bán kính vectơ r là thành phần thẳng đứng Z. Vì vậy

$$X = \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

$$Y = \mu_0 - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda}$$

$$Z = -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial r}$$

Lấy vi phân biểu thức (3.3) theo φ , λ và r và cho $r = R$ (Vì điểm P nằm trên mặt đất), ta thu được các biểu thức của các thành phần của trường từ như sau:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\mu_0}{4\pi} [g_1^0 \cos \varphi - (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) \sin \varphi] \\
Y &= \frac{\mu_0}{4\pi} [g_1^1 \sin \lambda - h_1^1 \cos \lambda] \\
Z &= \frac{2\mu_0}{4\pi} [g_1^0 \sin \varphi + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

trong đó g_1^0, g_1^1, h_1^1 là các hằng số không phụ thuộc vào vị trí của điểm P trên mặt đất. φ_0 và λ_0 là tọa độ giao điểm của trục từ với mặt Quả Đất. Nếu thừa nhận kinh tuyến đi qua điểm đó là kinh tuyến gốc, thì $\lambda_0 = 0$ và theo công thức (3.2) $h_1^1 = 0$, vì vậy các thành phần của trường từ của quả đất là:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\mu_0}{4\pi} [g_1^0 \cos \varphi - g_1^1 \cos \lambda \sin \varphi] \\
Y &= \frac{\mu_0}{4\pi} [g_1^1 \sin \lambda] \\
Z &= \frac{2\mu_0}{4\pi} [g_1^0 \sin \varphi + g_1^1 \cos \lambda \cos \varphi]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Nếu cho trục từ trùng với trục quay của Quả Đất, thì các thành phần của trường từ sẽ có dạng:

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\mu_0}{4\pi} g_1^0 \cos \varphi \\
Y &= 0 \\
Z &= \frac{2\mu_0}{4\pi} g_1^0 \sin \varphi
\end{aligned}$$

hoặc

$$\begin{aligned}
X = H &= \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \cos \varphi \\
Z &= \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3} \sin \varphi
\end{aligned}$$

Tại xích đạo, ở đó $\varphi = 0$, ta có

$$Z = 0; \quad H = H_T = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \tag{3.6}$$

tại điểm cực $\varphi = 90^\circ$

$$H = 0; \quad Z = H_T = \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3} \tag{3.7}$$

Tỷ số $\frac{H}{Z}$ là tg của góc I (từ khuynh).

Từ các phương trình (3.5) ta có:

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \varphi \quad (3.8)$$

tức là tg của góc I hai lần lớn hơn tg của vĩ độ từ. Nếu đem so sánh các giá trị của trường địa từ tính được theo các công thức vừa nêu trên đây với các giá trị thực tế thu được ta thấy tại một số điểm có sự sai lệch tương đối lớn. Tuy nhiên sự sai lệch không quá lớn để có thể gạt bỏ giả thuyết về sự từ hóa đồng nhất. Ngược lại về cơ bản, trường quan sát được có khuynh hướng gần với trường của quả cầu bị từ hóa đồng nhất.

Ví dụ, giá trị cường độ trường tại xích đạo từ, khoảng hai lần bé hơn giá trị trường tại cực từ (Tại cực từ $H_T = 65000 \text{ nT}$, tại xích đạo $H_T = 35000 \text{ nT}$).

Trong nhiều trường hợp độ từ khuynh tuân theo quy luật (3.8).

Vì vậy gần đúng bậc nhất, ta có thể xem trường từ của Quả Đất là trường từ của một quả cầu bị từ hóa đồng nhất.

Trên cơ sở của giả thuyết này người ta có thể tìm được các gradient của trường từ cũng như momen từ của Quả Đất.

3.1.1 Gradient

Gradient của mỗi thành phần trường từ của Quả Đất là sự thay đổi của nó khi chuyển theo mặt đất hoặc thẳng góc với mặt đất một khoảng bằng đơn vị khoảng cách.

Ta sẽ tìm các gradient của các thành phần thẳng đứng và nằm ngang theo chiều cao và vĩ độ từ. Từ các phương trình (3.5) ta có:

$$\frac{\Delta H}{\Delta R} = -\frac{3H}{R}; \quad \frac{\Delta H}{\Delta \varphi} = -H \operatorname{tg} \varphi = -\frac{Z}{2} \sin I^0$$

và

$$\frac{\Delta Z}{\Delta R} = -\frac{3Z}{R}; \quad \frac{\Delta Z}{\Delta \varphi} = -Z \operatorname{ctg} \varphi = 2H \sin I^0$$

Nếu thừa nhận bán kính của quả đất $R=6.10^3 \text{ km}$, còn các thành phần thẳng đứng và nằm ngang tại Xanh Petecbua tương ứng bằng 47000 nT và 15000 nT ta có thể thu được:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Z}{\Delta R} &= -23,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{nT}}{\text{m}}; \\ \frac{\Delta Z}{\Delta \varphi^0} &= 250 \frac{\text{nT}}{\text{do}} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{nT}}{\text{m}}; \\ \frac{\Delta H}{\Delta R} &= -7,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{nT}}{\text{m}}; \\ \frac{\Delta H}{\Delta \varphi^0} &= 400 \frac{\text{nT}}{\text{do}} = -4,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{nT}}{\text{m}}; \end{aligned}$$

tức là khi lên cao 1 km, thành phần thẳng đứng tại Xanh Petecbua giảm đi $23,5 \text{ nT}$, còn thành phần nằm ngang giảm $7,5 \text{ nT}$. Khi dịch chuyển 1 km về phía cực từ bắc thành phần thẳng đứng tăng lên $2,5 \text{ nT}$ còn thành phần nằm ngang giảm đi 4 nT .

3.1.2 Mômen từ của Quả Đất

Ta có thể tìm được mômen từ của quả đất trong trường hợp bị từ hóa đồng nhất bằng cách bình phương các phương trình (3.2) rồi sau đó cộng chúng lại. Thực vậy, sau khi thực hiện các phép tính đó, ta thu được:

$$\frac{4}{3}\pi J = \sqrt{g_1^{0\ 2} + g_1^{1\ 2} + h_1^{1\ 2}}$$

Từ đó nhân cả hai vế với R^3 , ta thu được

$$M = R^3 \sqrt{g_1^{0\ 2} + g_1^{1\ 2} + h_1^{1\ 2}} \quad (3.9)$$

Từ các phương trình (3.4) bằng cách thay các giá trị bằng số của X, Y, Z tại một điểm bất kỳ nào đó của Quả Đất người ta tính được các giá trị của g_1^0 , g_1^1 và h_1^1 .

Các hệ số này ngày nay được xác định theo các số liệu quan sát được không phải tại một điểm trên mặt đất mà theo hàng loạt các quan sát tại các điểm phân bố đều trên mặt đất.

Theo tính toán của Aphanaxiepa:

$$g_1^0 = 30,320 \text{ A / m}; \quad g_1^1 = 2,290 \text{ A / m}; \quad h_1^1 = 5,900 \text{ A / m}$$

từ đó

$$M = 8,3 \cdot 10^{25} \text{ cgs m (} 8,3 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2 \text{)}.$$

$$1 \text{ Am}^2 = 10^3 \text{ cgs m}$$

Giá trị g, h do một số tác giả phương Tây đưa ra:

$$\text{Năm 1965: } g_1^0 = 30,334 \text{ A / m}; g_1^1 = 2,119 \text{ A / m}; h_1^1 = 5,776 \text{ A / m}.$$

$$\text{Năm 1980: } g_1^0 = 29,988 \text{ A / m}; g_1^1 = 1,957 \text{ A / m}; h_1^1 = 5,606 \text{ A / m}.$$

Theo Langel (1992) thì:

$$g_1^0 = 29,775 \text{ A / m}; \quad g_1^1 = 1,852 \text{ A / m}; \quad h_1^1 = 5,411 \text{ A / m}$$

Theo số liệu của William Gilbert năm 1992 thì

$$M = 7,856 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2 .$$

Độ từ hóa trung bình của quả đất là

$$J = \frac{3}{4\pi} \sqrt{g_1^{0\ 2} + g_1^{1\ 2} + h_1^{1\ 2}} = 0,072 \text{ cgs m (} 72 \text{ A / m)}$$

$$1 \text{ cgs m (về độ từ hoá)} = 10^3 \text{ A / m}$$

Nếu như thừa nhận rằng sự từ hóa của quả đất chỉ tập trung trong nhân của nó có bán kính khoảng hai lần bé hơn bán kính của quả đất, thì độ từ hóa của nhân phải lớn hơn khoảng tám lần, tức là

$$J = 0,58 \text{ cgs m (} 576 \text{ A / m)}$$

3.1.3 Các cực địa từ. Các tọa độ từ

Một vài hiện tượng của trường từ của quả đất, như biến thiên ngày đêm theo mặt trời thường xảy ra và phụ thuộc vào các tọa độ địa từ: vĩ độ và kinh độ. Vĩ độ địa từ Φ là góc phụ với góc giữa trục từ của lưỡng cực, hoặc trục từ hóa đồng nhất với bán kính vectơ vẽ từ tâm Quả Đất đến điểm cho trước. Kinh độ địa từ Λ là góc giữa kinh tuyến từ địa phương và kinh tuyến từ đi qua trục địa lý. Giao điểm của trục từ của lưỡng cực hoặc của quả cầu bị từ hóa đồng nhất với mặt đất được gọi là các cực địa từ. Các cực địa từ khác với các cực từ. Các cực từ là các điểm mà tại đó độ từ khuynh bằng không và các đường đẳng từ thiên hội tụ.

Có thể xác định được tọa độ địa lý φ_0 và λ_0 của các cực địa từ theo phương trình (3.2). Từ các phương trình đó ta thu được:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_0 &= \frac{h_1^1}{g_1^1} \\ \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{g_0^1}{\sqrt{h_1^{12} + g_1^{12}}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

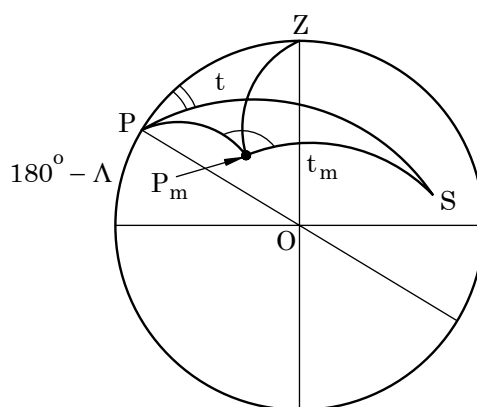
Sử dụng các giá trị bằng số của g_1^1 , g_0^1 , h_1^1 đã đưa ra ở trên ta có thể tính được các tọa độ của các cực địa từ Bắc

So sánh với các tọa độ của cực từ ta thấy rằng cực địa từ nằm cao hơn về phía Bắc một khoảng 7° và xa hơn về phía Đông 28° :

$$\varphi_0 = 78,2^\circ \text{ N}, \quad \lambda_0 = 68,8^\circ \text{ W}$$

Số liệu của một vài năm xác định sau này:

1965	$\varphi_0 = 78^\circ 33'$	$\lambda_0 = 68^\circ 33' \text{ W}$
1980	$\varphi_0 = 78^\circ 48'$	$\lambda_0 = 68^\circ 48' \text{ W}$



Hình 3.2
Tọa độ địa từ

Có thể chuyển từ tọa độ địa lý sang tọa độ địa từ. Muốn vậy ta hãy xét tam giác cầu PZP_m (Hình 3.2) trong đó PZ là góc phụ với vĩ độ từ địa phương, PP_m phụ với vĩ độ của cực địa từ còn P_mZ phụ với vĩ độ địa từ, góc ZPP_m là hiệu số kinh độ giữa điểm Z và cực địa từ còn góc ZP_mP là góc bù với kinh độ địa từ Λ vì nó được tính từ cực địa từ nam.

Theo các công thức lượng giác cầu ta có

$$\begin{aligned}\sin \Phi &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0) \\ \sin \Lambda &= \frac{\cos \varphi \sin(\varphi - \varphi_0)}{\cos \Phi}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Trong khi khảo sát một vài vấn đề về địa từ người ta còn phải dùng khái niệm thời gian từ địa phương. Thời gian từ địa phương t_m là góc giữa cung vòng tròn lớn P_mZ với cung P_mS đi qua mặt trời (Hình 3.2). Từ tam giác cầu PP_mS ta thấy rằng góc này là hiệu số giữa các kinh độ địa từ của mặt trời và điểm cho trước Z . Các giá trị kinh độ từ này tính được từ công thức (3.11).

Tại các vùng vĩ độ trung bình và thấp thời gian từ khác rất ít so với thời gian mặt trời địa phương. Sự khác nhau đáng kể xảy ra ở những nơi cách cực địa từ khoảng từ 15 đến 20⁰.

3.2 Khai triển thế từ của Quả Đất thành chuỗi. Lý thuyết Gauss

Một bước tiến lớn tiếp theo trong việc biểu diễn giải tích trường từ của Quả Đất là lý thuyết Gauss. Gauss đã đề ra lý thuyết này từ năm 1838.

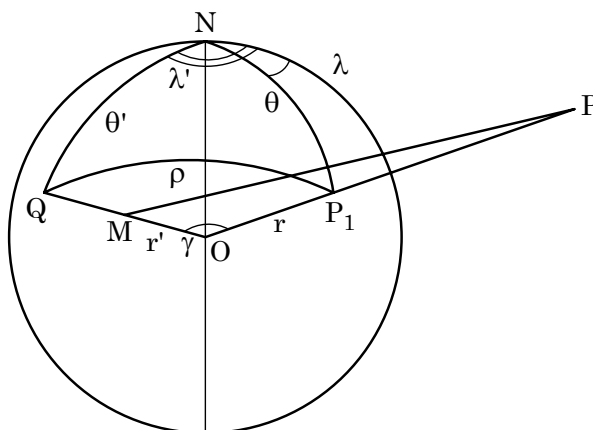
Lý thuyết có mục đích biểu diễn trường từ của quả đất dưới dạng hàm tọa độ của điểm quan sát mà không cần chú ý đến nguyên nhân vật lý của việc xuất hiện trường đó. Mặc dầu mang tính hình thức và không giải thích về nguồn gốc của trường từ của Quả Đất, lý thuyết Gauss có giá trị rất lớn và cho đến nay vẫn còn được sử dụng để tìm hiểu các hiện tượng địa từ.

Nếu cho rằng độ từ hóa \vec{J} của Quả Đất tại mỗi một điểm có hướng và độ lớn bất kỳ, ta có thể tìm được trị số của thế từ U do Quả Đất gây ra tại điểm P với tọa độ là θ và λ (trong đó θ là góc phụ đối với vĩ độ, còn λ là kinh độ) (Hình 3.3).

Có thể biểu diễn thế từ U dưới dạng sau:

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{dm}{\rho} \quad (3.12)$$

trong đó dm là yếu tố khối từ tại điểm bất kỳ M có tọa độ cầu là r', θ', λ' và nằm cách P một khoảng bằng ρ . Tích phân tính theo toàn bộ thể tích của hình cầu. Từ tam giác MPO ta có:



Hình 3.3

Khai triển thế từ của Quả Đất

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \gamma = r^2 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right]$$

trong đó γ là góc giữa r và r' , vì vậy

$$U = \frac{1}{4\pi r} \int \frac{dm}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \gamma}} \quad (3.13)$$

Vì $r > r'$ nên hàm $\varphi(r', \gamma)$ nằm dưới dấu tích phân có thể được khai triển theo chuỗi hội tụ của các hàm mũ $\frac{r'}{r}$. Thật vậy, dựa theo công thức về nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} \varphi(r', \gamma) &= \left\{ 1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \gamma \right\}^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r'}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \gamma \right] + \frac{3}{8} \left[\left(\frac{r'}{r} \right) - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) \cos \gamma \right]^2 \end{aligned}$$

Khai triển các dấu ngoặc vuông và kết hợp các số hạng r'/r cùng một bậc, ta thu được:

$$\varphi(r', \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma)$$

Trong đó $P_n(\cos \gamma)$ là một hàm số nào đó của $\cos \gamma$ mũ bậc n . Các hàm số này được gọi là các đa thức Legendre. Trong lý thuyết thế về các hàm số cầu người ta đã nghiên cứu các tính chất của đa thức Legendre. Theo một trong các tính chất đó người ta có thể tính được đa thức hạng $(n+1)$ nếu biết được đa thức hạng n . Công thức truy hồi có dạng:

$$P_{n+1}(\cos \gamma) = \frac{(2n+1)}{n+1} \cos \gamma P_n(\cos \gamma) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\cos \gamma) \quad (3.14)$$

Giá trị của hai đa thức đầu tiên thu được trực tiếp từ khai triển nhị thức Newton. Thật vậy, từ phương trình (3.13) ta có:

$$\begin{aligned} P_0(\cos \gamma) &= 1 \\ P_1(\cos \gamma) &= \cos \gamma \end{aligned}$$

Vì vậy, nếu áp dụng công thức (3.14) ta tìm được

$$P_2(\cos \gamma) = \frac{3}{2} \cos^2 \gamma - \frac{1}{2}$$

$$P_3(\cos \gamma) = \frac{5}{2} \cos^3 \gamma - \frac{3}{2} \cos \gamma$$

$$P_4(\cos \gamma) = \frac{35}{8} \cos^4 \gamma - \frac{15}{4} \cos^2 \gamma + \frac{3}{8}$$

Vì vậy có thể viết biểu thức thế từ (3.12) dưới dạng chuỗi:

$$U = \frac{1}{4\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) dm$$

Để dàng thấy rằng, số hạng đầu tiên của chuỗi này bằng không. Thật vậy, khi $n=0$ ta thu được $U = \int dm$. Đây chính là tổng tất cả các khối từ, mà như ta đã biết, trong mỗi một vật thể tổng tất cả các khối từ bằng không. Vì vậy

$$U = \frac{1}{4\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) dm \quad (3.15)$$

Hơn nữa, từ tam giác QNP_1 (Hình 3.3), theo công thức lượng giác cầu, ta có:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda') \quad (3.16)$$

Trong lý thuyết các hàm số cầu, người ta đã chứng minh rằng các đa thức Legendre $P_n(\cos \gamma)$ khi thay thế $\cos \gamma$ bằng biểu thức (3.16) sẽ có dạng sau:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} [c_n^m P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' + c_n^m P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda'] \quad (3.17)$$

trong đó:

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}$$

$$P_n^m(\cos \theta') = \sin^m \theta' \frac{d^m P_n(\cos \theta')}{d(\cos \theta')^m}$$

và c_n^m là các hệ số bằng số, hệ số này khi $n=1$ bằng đơn vị.

Hàm $P_n^m(\cos \theta)$ được gọi là hàm Legendre liên kết, khi $n=1$ và $n=2$ ta có các giá trị sau:

$$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$$

$$P_1^2(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta$$

$$P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta$$

$$P_3^1(\cos \gamma) = \frac{15}{2} \cos^2 \theta \sin \theta + 6 \sin \theta$$

$$P_3^2(\cos \theta) = 15 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$P_3^3(\cos \theta) = 15 \cos^3 \theta$$

Thay vào phương trình (3.15) $P_n(\cos \gamma)$ qua biểu thức (3.17) ta có:

$$U = \frac{1}{4\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\frac{r'}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [c_n^m P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' + c_n^m P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda'] dm$$

Vì θ , λ và r không thay đổi khi tính tích phân nên có thể đưa các hàm phụ thuộc vào chúng ra khỏi dấu tích phân, vì vậy:

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda c_n^m \int r'^m P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm + P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda c_n^m \int r'^m P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm]$$

Biểu thức dưới dấu tích phân không phụ thuộc vào tọa độ của điểm P và với hình cầu cho trước là những đại lượng không đổi. Vì vậy, nếu đưa vào các ký hiệu:

$$A_n^m = c_n^m \int r' P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm$$

$$B_n^m = c_n^m \int r' P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm \quad (3.18)$$

thì ta nhận được

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta)$$

Nếu lại đưa thêm vào các ký hiệu

$$A_n^m = R^{n+2} g_n^m$$

và

$$B_n^m = R^{n+2} h_n^m \quad (3.19)$$

trong đó R là bán kính của hình cầu, thì ta thu được biểu thức cuối cùng của thế từ U

$$U = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta) \quad (3.20)$$

Tại các điểm trên mặt cầu, $r=R$, thế U có biểu thức sau

$$U = \frac{R}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta) \quad (3.21)$$

Như vậy là thế từ ở trên mặt cầu, do một khối từ nào đó nằm trong mặt cầu gây ra, được biểu diễn dưới dạng một tổng kép với một số vô hạn các số hạng. Đồng thời với mỗi một số hạng ta thấy chúng chứa các hàm số cầu $P_n^m(\cos\theta)$ với các hệ số không đổi g_n^m và h_n^m .

Nếu giới hạn khai triển đến các số hạng hạng n thì số các số hạng g và h sẽ là:

$$N = n(n + 2)$$

Từ (3.21) ta dễ dàng thấy rằng, m không thể lớn hơn n và khi $m = 0$ tất cả các số hạng chứa các hệ số h bằng không.

Người ta tính các thành phần của trường X, Y và Z bằng cách lấy vi phân biểu thức (3.20) theo các tọa độ tương ứng, và sau đó cho $r=R$, tức là

$$\begin{aligned} Z &= -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial r} \\ &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(n+1)g_n^m \cos m\lambda + (n+1)h_n^m \sin m\lambda \right] P_n^m(\cos\theta) \\ X &= -\mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ &= -\mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[(g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \right] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\ Y &= -\mu_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ &= \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[mg_n^m \sin m\lambda - mh_n^m \cos m\lambda \right] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Về bản chất mà nói toàn bộ lý thuyết Gauss được thể hiện trong các phương trình này. Như ta thấy các phương trình này cho phép tính các yếu tố trường từ của Quả Đất tại mỗi một điểm bất kỳ trên mặt đất, nếu như biết trước các hệ số cố định g_n^m và h_n^m . Vì các vế phải của các phương trình này được biểu diễn dưới dạng các chuỗi với vô hạn các số hạng, nên để có thể sử dụng được các phương trình này trong thực tế người ta chỉ giới hạn một số hữu hạn các số hạng mà thôi. Số lượng các số hạng được giữ lại tùy thuộc vào mức độ hội tụ của chuỗi đó. Vấn đề mức độ hội tụ của các chuỗi này còn chưa được làm sáng tỏ nhưng chắc là các chuỗi này hội tụ chậm vì có một số lớn các dị thường địa phương và khu vực do các "khối từ" nằm gần mặt đất gây ra.

Vì khi n tăng, số các hệ số g_n^m và h_n^m tăng lên rõ rệt cho nên trong thực tế người ta thường giới hạn số hạng không theo mức độ hội tụ của chuỗi mà dựa vào số lượng các phép tính cần thiết để xác định các hệ số cố định. Chính Gauss trong công trình của mình cũng chỉ giới hạn đến khai triển hạng bốn ($n=4$).

Để xác định được các hệ số cố định g_n^m và h_n^m , từ các quan sát cần thiết phải xác định được các yếu tố của trường từ của quả đất tại một số điểm phân bố tương đối đều trên mặt đất.

Khi $n = 4$ số các hệ số là 24, vậy số phương trình tối thiểu phải là 24.

Tại mỗi một điểm có thể thành lập được ba phương trình, nên số điểm tối thiểu phải là 8.

Tuy nhiên do các ảnh hưởng ngẫu nhiên của các dị thường địa phương có thể làm sai lệch các kết quả, nên để đạt được mức tin cậy lớn cần phải sử dụng số điểm nhiều hơn sao cho số phương trình lớn hơn nhiều số ẩn số cần tìm. Chính bản thân Gauss đã xác định 24 hệ số theo các quan sát tại 12 điểm. Như vậy là Gauss đã giải 36 phương trình để xác định 24 ẩn số.

Trong trường hợp đó người ta sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu để giải hệ thống các phương trình này.

Sau Gauss nhiều nhà bác học đã tiến hành giải hệ thống các phương trình này để tìm các hệ số bằng số theo số lượng các số hạng khai triển khác nhau.

3.3 Ý nghĩa vật lý của các số hạng trong khai triển Gauss

Như ta đã thấy khai triển thế từ thành chuỗi là một phép tính hình thức. Phép tính này được gọi là giải tích điều hòa cầu. Tuy nhiên, mặc dầu phép biến đổi này hoàn toàn có tính chất hình thức nhưng các số hạng riêng biệt của chúng, tương ứng với số thứ tự n , có ý nghĩa vật lý nhất định, tương tự như trong giải tích điều hòa (giao động của sợi dây)

Các số hạng khai triển đầu tiên tương ứng với $n=1$ dễ dàng được phân tích ý nghĩa vật lý nhất.

Thật vậy khi $n = 1$, các phương trình (3.22) có dạng:

$$\begin{aligned} X &= \mu_0 [g_1^0 \sin \theta - (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) \cos \theta] \\ Y &= \mu_0 [g_1^1 \sin \lambda - h_1^1 \cos \lambda] \\ Z &= 2\mu_0 [g_1^0 \cos \theta + (g_1^1 \cos \lambda + h_1^1 \sin \lambda) \sin \theta] \end{aligned}$$

Về dạng các biểu thức này hoàn toàn tương tự với các biểu thức của các thành phần của trường từ do quả cầu bị từ hóa đồng nhất gây ra. Nhưng có thể dễ dàng chứng minh rằng, các biểu thức này không những tương tự về dạng mà còn thống nhất với nhau về bản chất. Muốn vậy ta cần thiết phải tìm các giá trị của các hệ số cố định g_1^0, g_1^1 và h_1^1

Từ các phương trình (3.18) khi $n=1$ ta tìm được:

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \int r' \cos \theta' dm \\ B_1^1 &= \int r' \sin \theta' \sin \lambda' dm \\ A_1^1 &= \int r' \sin \theta' \cos \lambda' dm \end{aligned}$$

Các biểu thức dưới dấu tích phân là hình chiếu của bán kính vectơ r' lên các trục tọa độ vuông góc Z, X và Y , vì vậy nếu gọi chúng là z', x' và y' ta có:

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \int z' dm \\ B_1^1 &= \int x' dm \\ A_1^1 &= \int y' dm \end{aligned} \tag{3.23}$$

Ta sẽ chứng minh rằng các biểu thức trên là các hình chiếu của mômen từ M của quả đất lên các trục tọa độ, tức là:

$$A_1^0 = M_z; \quad B_1^1 = M_x; \quad A_1^1 = M_y$$

Biểu diễn một trong các phương trình (3.23) dưới dạng

$$A_1^0 = \int \rho z' dv \quad (3.24)$$

trong đó ρ là mật độ của khối từ và dv là yếu tố thể tích.

Từ lý thuyết về thế từ ta đã biết rằng, các khối từ ảo có thể được phân bố trên mặt hoặc ở trong lòng vật thể bị nhiễm từ, đồng thời mật độ của các khối từ mặt ρ_s được biểu thị bằng biểu thức:

$$\rho_s = J_n$$

trong đó J_n là thành phần vector độ tư hóa \vec{J} theo pháp tuyến đối với mặt, còn mật độ của các khối từ khối được biểu diễn bằng biểu thức:

$$\rho_v = \text{div} \vec{J}$$

Vì vậy, nếu thay ρ_s và ρ_v bằng các giá trị của nó trong các biểu thức (3.24) ta thu được:

$$\vec{A}_1^0 = -\int z' \text{div} \vec{J} dv + \int z' J_n d\vec{S}$$

Tích phân đầu được tính theo toàn bộ thể tích, còn tích phân thứ hai tính theo mặt của vật thể. Theo công thức của giải tích vector ta có thể viết:

$$z' \text{div} \vec{J} = \text{div}(z' \vec{J}) - (\vec{J} \overrightarrow{\text{grad}} z') = \text{div}(z' \vec{J}) - J_z.$$

Vì vậy:

$$A_1^0 = -\int \text{div}(z' \vec{J}) dv + \int J_z dv + \int z' J_n dS$$

Theo định lý Ostrogradski:

$$\int \text{div}(z' \vec{J}) dv = \int z' J_n dS$$

và do đó

$$A_1^0 = \int J_z dv$$

Như vậy là ta đã chứng minh được A_1^0 là hình chiếu của mô men từ trên trục z .

Hoàn toàn tương tự như vậy ta có thể chứng minh được rằng

$$A_1^1 = \int J_y dv$$

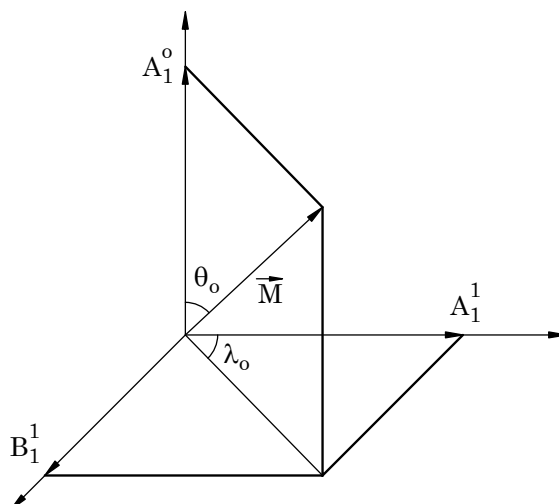
$$B_1^1 = \int J_x dv$$

Biểu diễn các thành phần của mômen từ qua các tọa độ cực θ_0 và λ_0

$$A_1^0 = M \cos \theta_0$$

$$B_1^1 = M \sin \theta_0 \sin \lambda_0$$

$$A_1^1 = M \sin \theta_0 \cos \lambda_0$$



Hình 3.4

Ý nghĩa vật lý của khai triển Gauss

trong đó θ_0 là góc giữa trục từ của quả đất và trục quay ON (Hình 3.4), còn λ_0 là góc nhị diện giữa mặt phẳng kinh tuyến không và mặt phẳng kinh tuyến đi qua trục từ, tức là các tọa độ của giao điểm của trục từ đối với mặt đất.

Có thể biểu diễn mômen từ của quả đất M dưới dạng:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 J_{tb}$$

trong đó J_{tb} là độ từ hóa trung bình, vì vậy theo phương trình (3.19) ta có:

$$g_1^0 = \frac{4}{3} \pi J_{tb} \cos \theta_0$$

$$g_1^1 = \frac{4}{3} \pi J_{tb} \sin \theta_0 \cos \lambda_0$$

$$h_1^1 = \frac{4}{3} \pi J_{tb} \sin \theta_0 \sin \lambda_0$$

So sánh các biểu thức này với các biểu thức (3.2) ta thấy chúng đồng nhất với nhau vì $\varphi_0 = 90^\circ - \theta_0$ và khi từ hóa đồng nhất $J = J_{tb}$.

Như vậy số hạng đầu tiên trong khai triển Gauss biểu diễn thế từ của quả cầu bị từ hóa đồng nhất có mômen từ bằng mômen từ trung bình khi quả cầu bị từ hóa đồng nhất.

Có thể giải thích tiếp các số hạng tiếp theo trong khai triển Gauss như là thế từ của lần lượt nhiều lưỡng cực từ gây ra.

3.4 Phân chia trường từ của Quả Đất ra thành các thành phần "bên trong" và "bên ngoài"

Một trong những kết quả chính của lý thuyết Gauss là tìm hiểu bản chất của trường từ của Quả Đất và khả năng phân chia trường từ đó ra thành các thành phần có nguồn gốc bên trong và bên ngoài. Chính bản thân Gauss trong khi khai triển chỉ giới hạn khảo sát thành

phần có nguyên nhân bên trong. Năm 1885 Smith đầu tiên đã tiến hành khai triển thế từ của Quả Đất theo các nguồn gốc bên trong và bên ngoài quả đất.

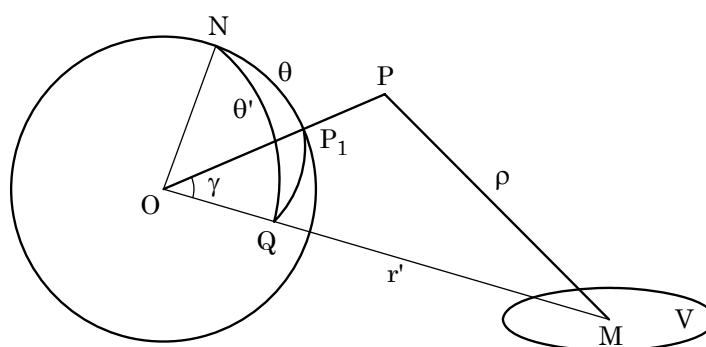
Giả sử các khối từ tạo nên trường từ trên mặt đất nằm ngoài Quả Đất và tập trung trong một thể tích V nào đó.

Ta hãy khảo sát thế từ tại điểm P do yếu tố khối từ nằm tại điểm M gây ra. Lúc đó ta có:

$$dU = \frac{dm}{4\pi\rho}$$

trong đó $\rho = PM$, $r' = OM$ và $\gamma = POM$.

Vì vậy:



Hình 3.5

Khai triển trường từ của Quả Đất theo nguồn gốc ngoài

$$dU = \frac{dm}{4\pi\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}}$$

Đưa r' ra khỏi dấu căn, ta thu được

$$dU = \frac{dm}{4\pi r' \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{r'}\right) \cos \gamma}}$$

Vì $r' > r$ nên nếu như ta khai triển biểu thức dưới dấu căn thành chuỗi các hàm số mũ của r/r' , tương tự như tiết trước, ta có:

$$dU = \frac{1}{4\pi r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \gamma) dm$$

Thế của toàn bộ khối tập trung trong thể tích V , rõ ràng sẽ được biểu diễn bằng biểu thức:

$$U = \int_V \frac{1}{4\pi r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos \gamma) dm$$

Từ tam giác cầu P_1NQ :

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda')$$

Vì vậy nếu đặt biểu thức này vào hàm số dưới dấu tích phân, theo (3.17) ta thu được:

$$U = \int_V \frac{1}{4\pi r'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r'}\right)^n \sum_{m=0}^n [c_n^m P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' + c_n^m P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda'] dm$$

hoặc

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{4\pi}\right) \sum_{m=0}^n \left[\cos m\lambda \int_V \left(\frac{c_n^m}{r^{m+1}}\right) P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm + \sin m\lambda \int_V \left(\frac{c_n^m}{r^{m+1}}\right) P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm \right] P_n^m(\cos \theta)$$

trong đó tích phân lấy theo thể tích V .

Nếu ký hiệu:

$$\int_V \frac{c_n^m}{r^{m+1}} P_n^m(\cos \theta') \cos m\lambda' dm = C_n^m$$

$$\int_V \frac{c_n^m}{r^{m+1}} P_n^m(\cos \theta') \sin m\lambda' dm = D_n^m$$

thì lúc đó ta có:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{4\pi}\right) \sum_{m=0}^n [C_n^m \cos m\lambda + D_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta)$$

trong đó C_n^m và D_n^m có cùng một giá trị tại tất cả các điểm bất kỳ P và vì vậy chúng là các hệ số hằng số.

Hơn nữa, nếu lại đưa thêm các ký hiệu

$$C_n^m = j_n^m R^{-(n-1)}$$

$$D_n^m = k_n^m R^{-(n-1)}$$

trong đó R là bán kính của Quả Đất, trong trường hợp đó:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{4\pi R^{n-1}} \sum_{m=0}^n [j_n^m \cos m\lambda + k_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos \theta) \quad (3.25)$$

Bây giờ ta sẽ tìm các thành phần Z_e , X_e và Y_e theo các trục tọa độ trên mặt cầu, tại đó $r = R$

$$\begin{aligned}
Z_e &= -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial r} = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [nj_n^m \cos m\lambda + nk_n^m \sin m\lambda] P_n^m(\cos\theta) \\
X_e &= -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [j_n^m \cos m\lambda + k_n^m \sin m\lambda] \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\
Y_e &= -\left(\frac{\mu_0}{r \sin \theta}\right) \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\
&= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [mj_n^m \sin m\lambda - mk_n^m \cos m\lambda] \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin \theta} \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Như vậy nếu có các khối từ nằm ngoài Quả Đất thì các thành phần trường X, Y và Z quan sát được trên mặt đất là tổng các thành phần tương ứng có nguồn gốc bên trong và bên ngoài, tức là:

$$\begin{aligned}
X &= X_i + X_e \\
Y &= Y_i + Y_e \\
Z &= Z_i + Z_e
\end{aligned}$$

Để dàng thấy rằng các số hạng đầu tiên trong khai triển của Z_e , X_e , và Y_e khi $n=0$ bằng không, vì vậy mà người ta bắt đầu lấy tổng không phải từ $n=0$ mà từ $n=1$. Trong trường hợp đó cộng theo từng số hạng các biểu thức (3.22) và (3.26), ta có thể thu được

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_{0m}}{4\pi}\right) \{[(n+1)g_n^m - nj_n^m] \cos m\lambda + [(n+1)h_n^m - nk_n^m] \sin m\lambda\} \\
&\quad \times P_n^m(\cos\theta) \\
X &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) [(g_n^m + j_n^m) \cos m\lambda + (h_n^m + k_n^m) \sin m\lambda] \\
&\quad \times \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \\
Y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) [m(g_n^m + j_n^m) \sin m\lambda - m(h_n^m + k_n^m) \cos m\lambda] \\
&\quad \times \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

Nếu đưa vào các ký hiệu

$$\begin{aligned}
g_{nm}^m + j_n^m &= p_n^m \\
(n+1)g_n^m - nj_n^m &= p_n^{m'} \\
h_n^m + k_n^m &= q_n^m \\
(n+1)h_n^m - nk_n^m &= q_n^{m'}
\end{aligned} \quad (3.27)$$

thì ta có thể biểu diễn các thành phần X, Y, Z dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}
X &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) (p_n^m \cos m\lambda + q_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \\
Y &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) (p_n^m \sin m\lambda - q_n^m \cos m\lambda) m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \\
Z &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) (p_n^m \cos m\lambda + q_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta)
\end{aligned}
\tag{3.28}$$

Từ các công thức (3.28) người ta có thể xác định được các phân riêng biệt do các nguồn gốc bên trong và bên ngoài gây ra. Thật vậy, nếu từ các giá trị về thành phần thẳng đứng Z quan sát được người ta xác định được p_n^m và q_n^m , còn p_n^m và q_n^m được xác định từ thành phần X, thì từ các phương trình (3.27) người ta xác định được các hệ số g_n^m và h_n^m tương ứng với trường có nguồn gốc bên trong và j_n^m , k_n^m tương ứng với trường có nguồn gốc bên ngoài.

Từ các quan sát trường từ của quả đất người ta xác định được phần trường do các nguyên nhân bên trong gây ra chiếm khoảng 94% toàn bộ trường quan sát được. Phần trường còn lại do các nguyên nhân bên ngoài gây ra.

3.5 Từ trường xoáy

Khi lập luận và chứng minh công thức (3.28) người ta giả thiết rằng trường từ của quả đất có thể vô hướng U và cường độ của nó được xác định bằng phương trình:

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}}U$$

Nếu trong không gian mà tại đó cần phải xác định trường \vec{B} có các dòng điện với mật độ \vec{J} , thì trường từ do các dòng điện đó gây ra không thể được biểu diễn qua thế vô hướng U mà phải biểu diễn qua thế vector của dòng A theo công thức:

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}A$$

trong đó thế vector \vec{A} được biểu thị bằng công thức:

$$\vec{A} = \int \frac{\vec{J}}{r} dv$$

ở đây r là khoảng cách từ yếu tố khối dv đến điểm cần khảo sát. Tích phân được tính theo toàn bộ thể tích có chứa dòng điện.

Một thí dụ về trường hợp này là trường từ ở trong dây dẫn có dòng điện chạy qua. Trong những trường hợp như vậy người ta nói rằng trường từ có đặc trưng xoáy.

Như vậy điều kiện để trường từ có đặc trưng xoáy là tại điểm đang được khảo sát nằm trong vật dẫn có dòng điện chạy qua, hay nói cách khác, điểm quan sát nằm trong không gian có chứa dòng điện.

Khi có trường từ xoáy, khai triển Gauss không còn tác dụng nữa, vì vậy khi trong khí quyển nằm gần mặt đất có các dòng điện chạy qua khai triển Gauss có thể được xem như không thể sử dụng được. Nhưng vì phần lớn trường từ của Quả Đất do các nguyên nhân bên trong gây ra, nên thành phần xoáy chỉ làm sai lệch một ít các hệ số g và h mà thôi. Khi có

phần xoáy tác dụng các hệ số g và h tính được theo thành phần bậc X_i sẽ khác với các hệ số từ các số liệu của thành phần đồng Y_i .

$$p_{nX}^m - p_{nY}^m = r_n^m$$

$$q_{nX}^m - q_{nY}^m = s_n^m$$

Trong trường hợp không có phần xoáy tác dụng vào, các hệ số tính được theo cả hai thành phần phải đồng nhất với nhau.

Nhờ có tính chất này người ta có thể xác định được sự hiện diện của thành phần trường xoáy trong trường nói chung.

Khi hiệu số giữa các hệ số lớn người ta có thể xác định được đại lượng cường độ trường từ do các dòng xoáy gây nên cũng như chính mật độ của dòng xoáy.

3.6 Phân tích điều hòa cầu và môđun

Những năm gần đây việc phân tích điều hòa cầu trường không đối xứng với các nghiên cứu địa vật lý và vũ trụ khác nhau cũng như đối với một số bài toán thực tế có giá trị rất lớn.

Với những lý do đó trong tiết này ta sẽ đề cập đến các đặc tính của các phép giải tích hiện đại.

3.6.1 Phân tích điều hòa cầu

Phân tích điều hòa cầu hiện đại thông thường dựa trên một số rất lớn các số liệu thực nghiệm. Tuy nhiên không phải tất cả các tác giả đều sử dụng phương pháp bình phương tối thiểu để tính các hệ số g_n^m, h_n^m . Trong một số trường hợp tính toán người ta sử dụng các phương pháp "tích phân". Phương pháp tích phân có dạng như sau:

$$\text{Các phương trình: } X = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad Y = -\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \text{và } Z = -\frac{\partial U}{\partial r} \text{ trong (3.21) và (3.22)}$$

được viết trong hệ thống tọa độ địa lý, tức là trong hệ thống không tính đến độ dẹt của Quả Đất. Sự phụ thuộc giữa các thành phần vuông góc X', Y', Z' trong hệ thống tọa độ trắc địa (có tính đến độ dẹt) và X, Y, Z có dạng sau: (với độ chính xác đến các đại lượng bé hạng hai) có dạng sau:

$$Z' = Z - \varepsilon X \sin 2\theta, \quad X' = X + \varepsilon Z \sin 2\theta, \quad Y' = Y$$

Sử dụng phương trình của mặt quả đất

$$r = a(1 - \varepsilon \cos^2 \theta)$$

với $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ trong đó a, b là các bán trục lớn bé của quả đất cùng với các công thức truy hồi của đa thức Legendre có thể đưa các phương trình (3.22) tới dạng:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_n^m \cos m\lambda + B_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta)$$

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\lambda + D_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta}$$

$$\sin \theta Y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (E_n^m \cos m\lambda + F_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \quad (3.29)$$

trong đó $A_n^m \dots F_n^m$ là các hàm tuyến tính của g_n^m, h_n^m . Nếu tính đến tính chất trực giao của các hàm số cầu, ta có thể viết:

$$A_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Z P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda$$

$$B_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Z P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda$$

$$C_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda$$

$$D_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} X \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda$$

$$E_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda$$

$$F_n^m = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Y \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda \sin \theta d\theta d\lambda \quad (3.30)$$

Như vậy việc phân tích bao gồm hai giai đoạn:

Bằng phương pháp gần đúng tính các tích phân trong các phương trình (3.30) và tính g_n^m, h_n^m theo các đại lượng A_n^m, \dots, F_n^m bằng cách giải hệ thống các phương trình tuyến tính (3.29...). Khi đó hệ thống các phương trình được chia ra thành các hệ thống con riêng biệt vì A_n^m, \dots, F_n^m chỉ liên hệ với g_n^m, h_n^m tại các giá trị khác nhau của n tương ứng với chỉ số một giá trị của m . Điều đó làm đơn giản việc tính toán. Sơ đồ giải tích cầu trên đây cũng chính là một ví dụ để tính tính elip của Quả Đất.

3.6.2 Phân tích môđun

Khi tu chỉnh các số liệu đo từ người ta cần phải sử dụng một phương pháp giải tích cầu mới. Đó là phương pháp phân tích môđun. Vì trên các vệ tinh và tên lửa cho đến nay chỉ mới đo được T chính xác nên công thức (3.22) không thể làm công thức cơ bản để xác định các hệ số điều hòa cầu. Trong trường hợp này Zamuda đề nghị xác định các hệ số g_n^m, h_n^m bằng phương pháp sau:

Đặt vào công thức $T = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ biểu thức của các thành phần qua chuỗi của các hàm số cầu (3.22), ta thu được biểu thức sau đây đối với T :

$$\begin{aligned}
T = & \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \left\{ \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \right]^2 \right. \\
& + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right]^2 \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \sin m\lambda - h_n^m \cos m\lambda) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \right\}^2 \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Trong tính toán ta chỉ giới hạn một số số hạng $n=N$. Khi có các giá trị thực nghiệm của T tại các điểm khác nhau thì ta thu được một hệ thống các phương trình không đồng nhất chứa các hệ số g_n^m, h_n^m dưới dạng bình phương. Giải phương trình này rất cồng kềnh và khó khăn kể cả khi sử dụng các máy tính điện tử hiện đại. Vì vậy người ta sử dụng phương pháp đơn giản hóa dựa trên việc tuyến tính hóa các phương trình. Nếu trong phương trình (3.31) thay g_n^m bằng $g_{n0}^m + \Delta g_n^m$, $h_n^m = h_{n0}^m + \Delta h_n^m$, trong đó g_{n0}^m, h_{n0}^m là các giá trị gần đúng của g_n^m và h_n^m và $\Delta g_n^m, \Delta h_n^m$, rồi khai triển (3.31) thành chuỗi Taylor và chỉ giữ nguyên các số hạng bé nhất của $\Delta g_n^m, \Delta h_n^m$ người ta thu được phương trình tuyến tính không đồng nhất dạng:

$$\begin{aligned}
T = & T_0 + \frac{1}{T_0} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n [X_0 \cos m\lambda \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right. \\
& + Y_0 \sin m\lambda \frac{mP_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \\
& + (n+1) Z_0 \cos m\lambda P_n^m(\cos \theta)] \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+2} \Delta g_n^m \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n [X_0 \sin m\lambda \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} - Y_0 \cos m\lambda \frac{mP_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \\
& \left. + (n+1) Z_0 \sin m\lambda P_n^m(\cos \theta)] \left(\frac{R_E}{r}\right)^{n+2} \Delta h_n^m \right\} \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Trong đó T_0, X_0, Y_0, Z_0 là các giá trị tính được theo các giá trị gần đúng bậc không g_{n0}^m, h_{n0}^m . Hệ thống k phương trình (k là số các điểm quan sát được của giá trị T) được giải bằng phương pháp bình phương tối thiểu. Các số hiệu chỉnh $\Delta g_n^m, \Delta h_n^m$ cho phép xác định chính xác hơn các giá trị g_n^m, h_n^m . Các giá trị thu được này lại được dùng để tính các thành phần T, X, Y và Z . Quá trình tính toán gần đúng lại tiếp tục. Người ta tiến hành tính toán cho đến khi các đại lượng Δg_n^m và Δh_n^m trở nên bé để có thể bỏ qua được. Phương pháp này được áp dụng để phân tích các số liệu đo từ trên các vệ tinh "Cosmos-49, 321, AGO2-6" và một số vệ tinh khác.