



## Chương 6. Các bài toán thuận trong thăm dò từ

### *Tôn Tích Ái*

*Địa từ và thăm dò từ.* NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006.

*Từ khoá:* Địa từ và thăm dò từ, Trường từ, Hiệu ứng trường từ, Palet Micôp, Bản mỏng nằm ngang.

---

*Tài liệu trong Thư viện điện tử ĐH Khoa học Tự nhiên có thể được sử dụng cho mục đích học tập và nghiên cứu cá nhân. Nghiêm cấm mọi hình thức sao chép, in ấn phục vụ các mục đích khác nếu không được sự chấp thuận của nhà xuất bản và tác giả.*

---

## Mục lục

<b>Chương 6</b>	<b>CÁC bài toán thuận trong thăm dò từ .....</b>	<b>2</b>
6.1	Dị thường của các vật thể đơn giản, đẳng thước trên mặt phẳng .....	4
6.1.1	Hình cầu .....	4
6.1.2	Ellipsoid tròn xoay dẹt .....	8
6.1.3	Sơ đồ nam châm một cực và hai cực .....	11
6.2	Dị thường của các vật thể có dạng đơn giản kéo dài .....	13
6.2.1	Hình trụ tròn nằm ngang .....	13
6.2.2	Bản mỏng bị từ hoá theo hướng cắm .....	16
6.2.3	Lớp cơ bản bị từ hoá bất kỳ .....	20
6.2.4	Lớp dày chạy xuống sâu vô cùng .....	21
6.2.5	Bậc .....	25
6.2.6	Bản mỏng nằm ngang .....	28
6.3	Bài toán tính hiệu ứng trường từ đối với các vật thể có dạng bất kỳ .....	29
6.3.1	Khái niệm .....	29
6.3.2	Palet Micôp .....	30

## Chương 6

### Các bài toán thuận trong thăm dò từ

Như đã trình bày trong chương V, trong chương này ta dùng các công thức đã được tìm ra từ trước trong hệ CGS, để chuyển sang hệ SI, trong các công thức trong hệ CGS giá trị  $J$  phải được chuyển từ hệ CGS về hệ SI (A/m), các kết quả thu được trong các công thức trên được đem nhân cho  $10^{-4}$ .

Giải bài toán thuận trong thăm dò từ trong trường hợp tổng quát được thực hiện nhờ các công thức đã nêu trong các chương trước đây (1.40) và (1.41). Tuy nhiên trong thực tế tất cả các tính toán đều trên giả thuyết cho rằng vật thể bị từ hoá đồng nhất và do đó đều dựa trên công thức (1.45).

Viết lại công thức cuối cùng ở dạng sau:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \left( J_x \frac{\partial V}{\partial x} + J_y \frac{\partial V}{\partial y} + J_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Sau khi vi phân biểu thức trên lần lượt theo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ta có thể dễ dàng thu được các công thức tổng quát về các thành phần của cường độ trường từ:

$$\begin{aligned} X_a &= -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( J_x \frac{\partial^2 V}{\partial^2 x} + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_a &= -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial y} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( J_x \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_a &= -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial z} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( J_x \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

(6.1)

Trong trường hợp bài toán hai chiều khi :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

và  $V_{xx} = -V_{zz}$ ,

thì các biểu thức (6.1) được đơn giản đi rất nhiều. Trong trường hợp này,  $Z_a$  và  $H_a$  (thành phần nằm ngang) được biểu diễn trực tiếp qua gradient trọng lực  $V_{xz}$  và  $V_{zz}$  dưới dạng:

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} (-J_x V_{xx} + J_y V_{xz}) \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} (-J_x V_{xz} + J_y V_{zz}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Trường từ khác với trường trọng lực vì chúng phụ thuộc vào vĩ độ từ. Thật vậy khi từ hoá cảm ứng, hướng của vectơ  $\vec{J}$  phụ thuộc vào hướng của  $\vec{T}_0$  (đối với vật thể đẳng thước, hướng của  $\vec{J}$  trùng với hướng của  $\vec{T}_0$ ), hướng đó gần cực từ ( $H_0=0, Z=Z_0$ ) gần như thẳng đứng, gần xích đạo gần như nằm ngang.

Nếu đặt  $J_x = J_y = 0$  thì từ các biểu thức (6.1) ta thu được sự liên hệ giữa các dị thường từ và trọng lực đối với các vật thể ba chiều trong miền vĩ độ cao (bỏ chỉ số  $z$  ở các biểu thức của  $J$ )

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J V_{xz} \\ Y_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J V_{yz} \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J V_{zz} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nếu cho  $J_z=0$  ta có các biểu thức cho vùng vĩ độ thấp:

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} (J_x V_{xx} + J_y V_{xy}) \\ Y_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} (J_x V_{xy} + J_y V_{yy}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Trong trường hợp bài toán hai chiều ở vùng vĩ độ cao ta có:

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J V_{xz} \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J V_{zz} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Trong vùng vĩ độ thấp bài toán hai chiều mất ý nghĩa khi đường phương của vật thể kéo dài theo hướng kinh tuyến từ, vì trong trường hợp đó hiệu ứng dị thường chỉ xuất hiện nhờ

các khối từ ảo nằm trong các đầu mút của các vật thể gây dị thường, còn khi vật thể có đường phương khác thì:

$$\begin{aligned} H_a &= -\frac{\mu_0}{4\pi} J_x V_{zz} \\ Z_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} J_x V_{xz} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ta hãy khảo sát một số thí dụ về giải bài toán thuận trong phương pháp thăm dò từ đối với một số vật thể cơ bản. Các vật thể cơ bản là các vật thể có dạng hình học sao cho các hiệu ứng dị thường của chúng được biểu diễn qua các hàm cơ bản.

Việc tìm kiếm các công thức cho các vật thể đó được thực hiện qua các phương pháp khác nhau (sử dụng thế từ trong đó có cả thế từ ảo, các khối từ ảo và các mối liên hệ giữa thế từ và thế trọng lực.)

## 6.1 Dị thường của các vật thể đơn giản, đẳng thước trên mặt phẳng

### 6.1.1 Hình cầu

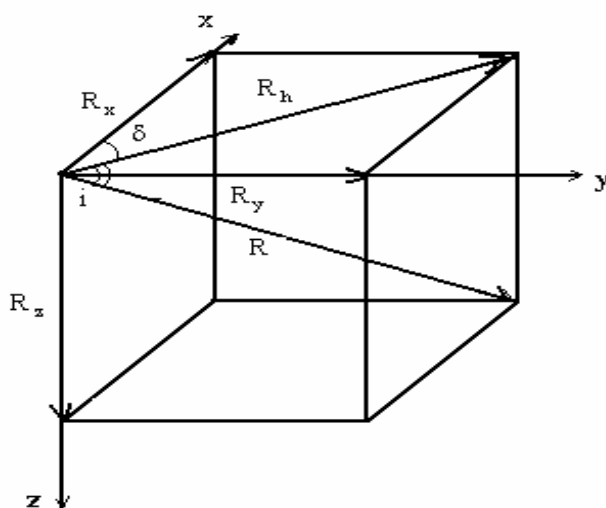
Từ (1.22) ta dễ dàng thu được cường độ trường  $\vec{B}(\vec{T}_a)$  do quả cầu bị từ hoá đồng nhất

$$\vec{B} = \mu_0 \text{grad} \left( \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( M \frac{3(\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{n}}{r^3} \right) \quad (6.7)$$

Trong đó  $\vec{r}$  là vectơ nối điểm tính toán với tâm hình cầu,  $\vec{n}$  là vectơ đơn vị có hướng của vectơ  $\vec{J}$ , còn  $\vec{M}$  là mô đun của mô men từ.

Các thành phần của  $\vec{B}(\vec{T}_a)$  theo các trục tọa độ là các đạo hàm cần tìm của thế từ :

$$X = -\mu_0 \frac{\partial U}{\partial x}, \dots$$



Hình 6.1

Vị trí của vector  $\vec{R}(T_0, T_a, J)$

Trong hệ thống tọa độ địa lý  $\vec{R}$  tương ứng với trường địa từ bình thường  $\vec{T}_0$  ( $i = I_0$ ,  $\delta = D_0$ ), trong hệ thống tọa độ địa từ:  $-\vec{T}_a$  trong hệ thống tọa độ địa phương  $-T_0$  hoặc độ từ hóa cảm ứng  $J$  ( $\delta$  là phương vị từ của tuyến,  $i$  là độ lệch của vector  $\vec{R}$  trong mặt phẳng đi qua tuyến)

Để tìm các biểu thức đó ta chọn hệ thống tọa độ và xác định hình chiếu của các vector  $\vec{n}, \vec{r}$  trên các trục tọa độ đó. Đặt góc tọa độ tại hình chiếu tâm hình cầu trên mặt phẳng ngang, hướng trục Ox lên phía bắc từ còn trục Oz xuống dưới. Hướng của  $\vec{M}$  trong trường hợp tổng quát được xác định bởi các góc  $i$  và  $\delta$  (Hình 6.1), còn khi từ hoá cảm ứng, được xác định bằng góc  $I_0$ . Các véc tơ  $\vec{n}$  và  $\vec{r}$  trong hệ thống tọa độ đó được xác định bằng các biểu thức sau:

$$\vec{n} = (\cos i \cos \delta) \vec{k} + (\cos i \sin \delta) \vec{l} + (\sin i) \vec{m}$$

$$\vec{r} = -x \vec{k} - y \vec{l} + h \vec{m}$$

Nếu thực hiện các phép tính đại số đối với biểu thức (6.7) với  $r^2 = x^2 + y^2 + h^2$  ta thu được biểu thức tổng quát cho vector  $\vec{B}(\vec{T}_a)$  dưới dạng tổng của ba thành phần theo  $\vec{k}, \vec{l}, \vec{m}$ , từ đó ta dễ dàng thu được các thành phần  $X_a, Y_a, Z_a$  của  $\vec{B}$  riêng biệt:

$$X_a = \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2x^2 - y^2 - h^2) \cos i \cos \delta + 3xy \cos i \sin \delta - 3hx \sin i]$$

$$\begin{aligned}
Y_a &= \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2y^2 - y^2 - h^2)\cos i \cos \delta + \\
&+ 3xy \cos i \sin \delta - 3hy \sin i] \\
Z_a &= \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2h^2 - x^2 - y^2)\sin i - \\
&- 3hx \cos i \cos \delta - 3hy \cos i \sin \delta]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Đối với tuyến đi qua mặt phẳng chứa M ( $\delta=0, y=0$ ) ta có

$$\begin{aligned}
H_a &= \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2x^2 - h^2)\cos i - 3hx \sin i] \\
Z_a &= \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2h^2 - x^2)\sin i - 3hx \cos i]
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Khi từ hoá thẳng đứng ( $i=90^0$ ) các biểu thức trên có dạng đơn giản hơn:

$$\begin{aligned}
H_a &= \frac{-3\mu_0 Mhx}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} \\
Z_a &= \frac{\mu_0 M(2h^2 - x^2)}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Trong trường hợp đó trường từ có dạng đối xứng đối với hình chiếu của tâm quả cầu trên mặt đất.

Có thể dễ dàng thu được biểu thức ( $T_a$ ) qua các biểu thức (6.8) như là tổng các hình chiếu của  $X_a$  và  $Z_a$  theo phương trường bình thường (hình chiếu  $Y_a$  lên hướng đó bằng không)

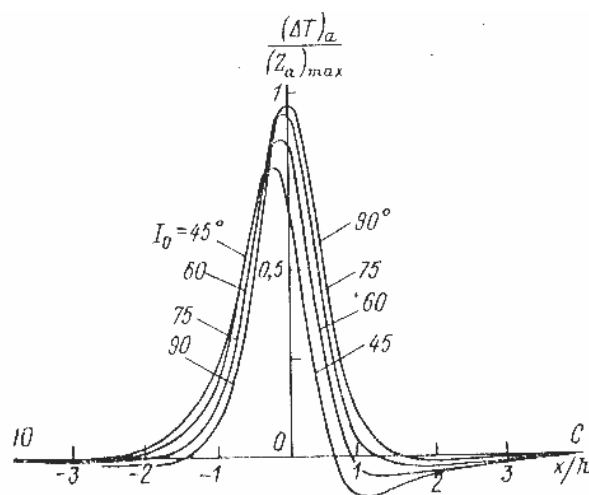
$$(\Delta T)_a = X_a \cos I_0 + Z_a \sin I_0.$$

Khi từ hoá cảm ứng ( $i=I_0, \delta=0$ ):

$$\begin{aligned}
(\Delta T)_a &= \frac{\mu_0 M}{4\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} [(2x^2 - y^2 - h^2)\cos^2 I_0 + \\
&+ (2h^2 - x^2 - y^2)\sin^2 I_0 - 3hx \sin 2I_0]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Khi quả cầu bị từ hoá thẳng đứng ta có thể dễ dàng xác định được hoành độ của các điểm đặc trưng trên các đường cong  $Z_a$  và  $H_a$ .

Các điểm đó là các điểm cực trị, các điểm không tương ứng với các hoành độ  $x_{\max}$ ,  $x_{\min}$ ,  $x_0$ . Khi quả cầu bị từ hoá nghiêng, việc xác định các điểm đó khó khăn hơn vì đối với các đường cong  $Z_a$  và  $H_a$  ta không biết được vị trí của hình chiếu tâm quả cầu trên mặt phẳng (góc tọa độ).



**Hình 6.2**

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên hình cầu dọc theo phương kinh tuyến

Khi từ hoá thẳng đứng  $x_0$  của  $Z_a$  và  $H_a$  được xác định như sau:

$$(x_0)_Z = \sqrt{2} h \quad ; \quad (x_0)_H = 0.$$

Vì vậy trong mặt phẳng thẳng đứng của tuyến các đường giá trị không  $Z_a$  sẽ là các đường thẳng nghiêng với trục  $Ox$  một góc  $\theta$  (với  $\tan \theta = \sqrt{2}$ ).

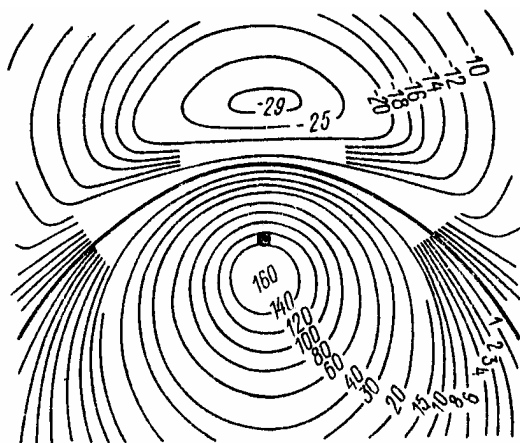
Trong không gian chúng tạo nên hình nón với đỉnh ở tâm hình cầu.

Các giá trị cực trị  $Z_a$  có được khi

$$(x_{\max})_Z = 0 \quad ; \quad (x_{\min})_Z = \pm 2h.$$

Khi đó  $(Z_a)_{\max} = \frac{\mu_0 M}{2\pi h^2}$  còn  $(Z_a)_{\min} =$  khoảng 2% của  $(Z_a)_{\max}$ .  $H_a$  đạt đến giá trị cực đại

khi  $(x_{\max})_H = -(x_{\min})_H = 0,5 h$ .  $(H_a)_{\max}$  khoảng 43% của  $(Z_a)_{\max}$ .



**Hình 6.3**

Các đường đẳng trị  $(\Delta T)_a$  trên hình cầu với  $I=60^\circ$  (trục thẳng đứng chạy theo phương kinh tuyến từ)

Khi từ hoá nghiêng các đường đẳng trị  $Z_a$  và  $H_a$  trong mặt phẳng nằm ngang sẽ đối xứng với hình chiếu ngang của  $\vec{J}$ . Đối với tuyến trùng với hình chiếu này, các giá trị  $(x_0)_Z$  và  $(x_0)_H$ , thu được từ các biểu thức (6.9) tương ứng bằng:

$$\begin{aligned} (x_0)_Z &= \frac{h}{2} \left( 3\text{ctgi} \pm \sqrt{9\text{ctg}^2 i + 8} \right) \\ (x_0)_H &= \frac{h}{2} \left( 3\text{tgi} \pm \sqrt{9\text{ctg}^2 i + 8} \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

còn  $\theta_1$  đối với đường trong mặt phẳng thẳng đứng tại đó  $Z_a$  bằng không trên phía của tuyến mà véc tơ  $\vec{J}$  trông vào đó và cực tiểu của  $Z$  nằm trong đó sẽ lớn hơn  $\theta_2$  nằm ở phía khác.

Hai hình (Hình 6.2) và (Hình 6.3) là đồ thị và các đường đẳng trị của  $(\Delta T)_a$  trên hình cầu bị từ hoá nghiêng.

### 6.1.2 Ellipsoid tròn xoay dẹt

Bài toán này được sử dụng nhiều trong thăm dò từ. Khi hướng của trường gây nên từ hoá hướng dọc theo một trong các trục của ellipsoid thì ellipsoid sẽ bị từ hoá theo hướng đó. Do đó trong trường hợp vật bị từ hoá thẳng đứng để tính toán ta chỉ cần tính đến một thừa số khử từ  $N$ , mà trong trường hợp hai bán trục  $a$  và  $b$  bằng nhau có thể được tính theo công thức:

$$N = 2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\theta}{(c + \theta)\sqrt{\varphi(\theta)}}$$

và được biểu diễn dưới dạng:

$$N = 4\pi a_1^2 c_1 \left( \frac{1}{q^2 c_1} - \frac{1}{q^3} \text{arctg} \frac{q}{c_1} \right) \quad (6.13)$$



trong đó  $a_1$  và  $c_1$  là các bán trục của ellipsoid đi qua điểm tính toán có cùng tiêu điểm với ellipsoid tạo nên trường từ,  $q$  là nửa khoảng cách tiêu cự. Phương trình mặt ellipsoid lúc đó sẽ là:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \quad (6.14)$$

Vì trường từ của ellipsoid tròn xoay bị từ hoá thẳng đứng đối xứng đối với trục Oz, nên có thể được xem như trường từ của một tiết diện thẳng đứng đi qua trục Ox, đồng thời xem  $y=0$ . Giải phương trình (6.14) mà trong đó giá trị:

$q = \sqrt{a_1^2 - c_1^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$  đã biết trước, ta có thể xác định được  $a_1$  và  $c_1$  đối với một điểm bất kỳ với tọa độ  $x$  và  $z$ :

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{x^2 + z^2 + q^2}{2} + \frac{t}{2} \\ c_1^2 &= \frac{x^2 + z^2 - q^2}{2} + \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

với

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 4q^2 z^2}.$$

Thế từ của ellipsoid tương ứng với công thức tổng quát:

$$U(x, y, z) = \frac{abc}{4\pi a' b' c'} (J_x L_1 x + J_y M_1 y + J_z N_1 z)$$

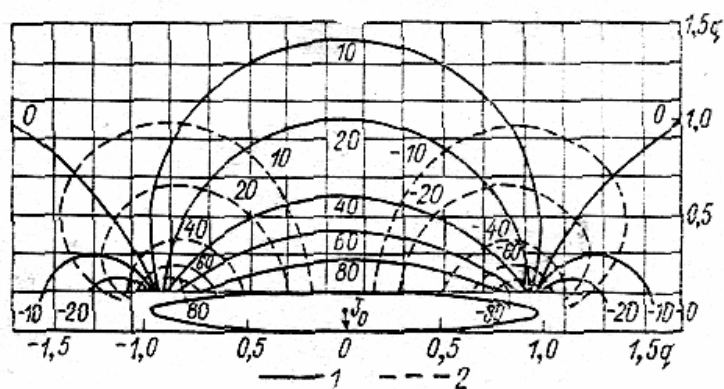
Khi  $L_1 = M_1 = 0$  phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$U = \frac{a^2 c}{4\pi a_1^2 c_1} J_z N_1 = \frac{3M}{4\pi} \left( \frac{1}{q^2 c_1} - \frac{1}{q^3} \operatorname{arctg} \frac{q}{c_1} \right) z \quad (6.16)$$

trong đó  $M$  là mô men từ của ellipsoid, giá trị của nó bằng  $\frac{4}{3} \pi a^2 c J = VJ$  ( $V$  là thể tích của ellipsoid).

Nếu đặt vào công thức (6.16) giá trị  $c_1$  từ (6.15) và vi phân biểu thức thu được theo  $z$  và theo  $x$ , sau đó thay  $z$  bằng  $h$  ta thu được:

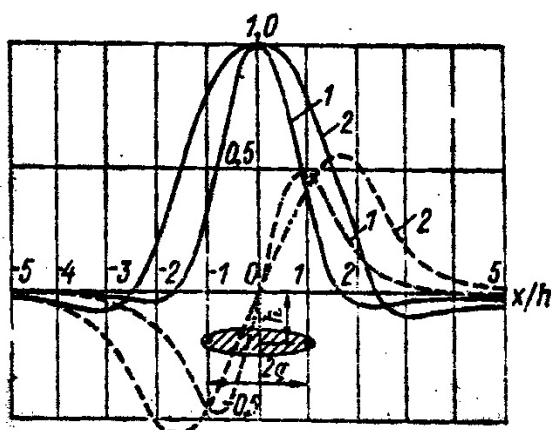
$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{3\mu_0 M}{4\pi} \left[ \frac{h^2}{t c_1^3} - \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{c_1} \right) \right] \\ H_a &= -\frac{3M\mu_0 h x}{4\pi a_1^2 c_1 t} \end{aligned} \quad (6.17)$$



**Hình 6.4**

Trường từ trên ellipsoid tròn xoay: 1.-  $Z_a$  2--  $H_a$

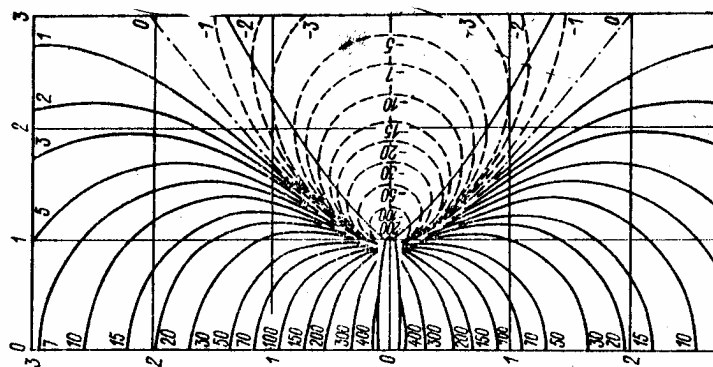
Trong các công thức (6.17) chỉ có  $q$  và  $M$  là các thông số của ellipsoid, vì vậy nếu đặt  $q$  bằng đơn vị và biểu diễn  $Z_a$  và  $H_a$  dưới dạng đơn vị tương đối  $Z/M$  và  $H/M$  ta thu được công thức đúng với bất kỳ ellipsoid tròn xoay nào



**Hình 6.5**

Các đường cong  $Z_a(I)$  và  $H_a(II)$

Trên ellipsoid tròn xoay hai cực: 1-  $q = 1$  ; 2.  $q = 2$



Hình 6.6

Các đường đẳng trị  $Z$  trong mặt phẳng thẳng đứng trên ellipsoid tròn xoay đặt trong đó  $t$  có giá trị như trong biểu thức (6.15)

$$\frac{Z}{3M} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{h^2}{t'c_1^3} - \frac{1}{q^2} \left( \frac{1}{c_1} - \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{q}{c_1} \right) \right]$$

$$\frac{H}{3M} = -\frac{\mu_0 hx}{4\pi a_1^2 c_1 t'} \quad (6.18)$$

Ở đây  $t'$  biểu thị giá trị của  $t$  khi  $q=1$ .

### 6.1.3 Sơ đồ nam châm một cực và hai cực

Sơ đồ nam châm gồm hai khối từ ảo khác dấu nằm cách nhau một khoảng  $l$ . Khi  $l$  khá lớn tại miền gần với một cực ta có thể bỏ qua ảnh hưởng của cực kia. Lúc đó ta thu được sơ đồ nam châm một cực.

Đối với sơ đồ nam châm một cực, biểu thức của thế từ tương ứng với định luật Coulomb sẽ có dạng  $U = \frac{m}{4\pi r}$ , trong đó khối từ ảo  $m = JS$  được xem là tập trung tại một điểm. Hai khối từ ảo nằm cách nhau một khoảng  $l$  tạo thành nam châm hai cực (lượng cực từ). Từ đó cường độ trường từ do một cực từ gây ra là:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Các thành phần của nó theo các trục tọa độ sẽ bằng

$$Z_a = \frac{\mu_0 mh}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H_a = \frac{\mu_0 mx}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.19)$$

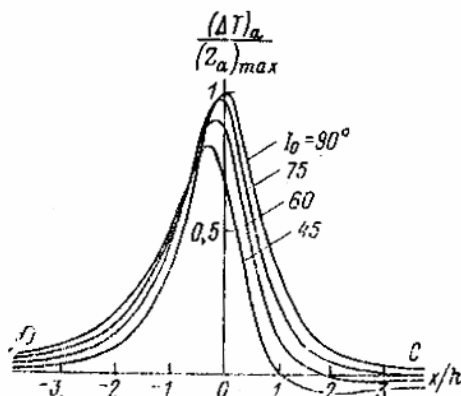
Đối với các tuyến theo phương kinh tuyến (k) và vĩ tuyến (v) đi qua hình chiếu của nam châm một cực lên trên mặt đất tương ứng ta có các dị thường sau:

$$(\Delta T)_{ak} = \frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} (h \sin I_0 - x \cos I_0) \quad (6.20)$$

$$(\Delta T)_{av} = \frac{\mu_0 m}{4\pi(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} h \sin I_0 \quad (6.21)$$

Thành phần  $Z_a$  đạt giá trị cực đại khi  $x=0$ ; khi  $x_{0,5} = 0,5h$ ,  $Z_a=0,5(Z_a)_{max}$ . Các cực trị của  $H_a$  nằm tại các điểm  $x_e = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} h$ , mà tại đó  $(H_a)_{max}=0,38(Z_a)_{max}$ . Thành phần  $(\Delta T)_a$  trên tuyến chạy dọc theo kinh tuyến bằng không khi  $x_0 = h \operatorname{tg} I_0$  tại phần bắc của tuyến và có các cực trị tại các điểm:

$$x_e = \frac{h}{4} \left( 3 \operatorname{tg} I_0 \pm \sqrt{9 \operatorname{tg}^2 I_0 + 8} \right) \quad (6.22)$$



**Hình 6.7**

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên nam châm một cực dọc theo tuyến chạy theo phương kinh tuyến

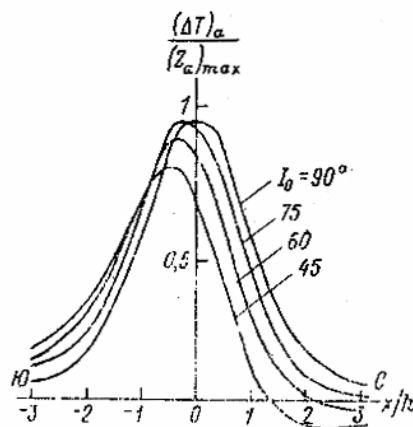
Từ đó khoảng cách giữa các cực trị sẽ bằng

$$l = \frac{3 \operatorname{tg} I_0}{2}$$

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên nam châm một cực được vẽ trên Hình 6.7. Để tiện cho việc so sánh trên Hình 6.8 người ta vẽ các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên hình trụ tròn thẳng đứng, bị từ hoá theo hướng cắm ( $R = h$ )

Với sơ đồ nam châm lệch một góc  $\theta$  đối với mặt phẳng nằm ngang, người ta tính hiệu ứng từ trên tuyến nằm trong mặt phẳng thẳng đứng chứa thanh nam châm. Ta chọn gốc tọa độ

nằm trên cực gần mặt đất nhất, lúc đó tọa độ của cực thứ hai sẽ bằng  $l \cos\theta$ . Tung độ của các cực là  $h$  và  $H$ . Lúc đó theo công thức (6.19) ta có:



Hình 6.8.

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên hình trụ tròn thẳng đứng chạy xuống sâu vô cùng dọc theo phương kinh tuyến khi  $R = h$

$$Z_a = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \frac{h}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{H}{[H^2 + (x + l \cos \theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

$$H_a = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \left\{ \frac{x}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x + l \cos \theta}{[H^2 + (x + l \cos \theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (6.23)$$

Khi  $\cos\theta = 0$  (trường hợp thanh nam châm thẳng đứng) thì

$$Z_a = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left( \frac{h}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{H}{(x^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$H_a = -\frac{\mu_0 m}{4\pi} \left( \frac{x}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(x^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (6.24)$$

Khi  $H - h$  nhỏ so với  $h$ , trường của mô hình nam châm giống với trường của quả cầu, khi  $H - h$  lớn, trường này giống với trường của mô hình nam châm một cực.

## 6.2 Dị thường của các vật thể có dạng đơn giản kéo dài

### 6.2.1 Hình trụ tròn nằm ngang

Thế trọng lực của vật thể hai chiều, như ta đã thấy trong các phần trên đây khi  $f = 1$ ,  $\sigma = 1$  có dạng:

$$V = 2S \ln \frac{1}{r} \quad (6.25)$$

Ý nghĩa vật lý của biểu thức này được thể hiện trong sự tương đương giữa trường trọng lực của hình trụ tròn với sợi dây vật chất.

Thế từ của hình trụ tròn tương ứng với phương trình Poisson có dạng

$$U = -\frac{JS}{2\pi r} \quad (6.26)$$

Cho  $r$  và  $J$  dưới dạng các biến phức

$$r = z = x + ih; \quad J_k = J_x + iJ_z$$

lúc đó thế từ cũng trở thành thế phức và có dạng sau:

$$U_k = -\frac{S}{2\pi z} (J_x + iJ_z) = -\frac{M_x + iM_z}{2\pi z} \quad (6.27)$$

trong đó  $M_x$  và  $M_z$  là các thành phần của mô men phức  $M_k$ :

$$M_x = M \cos i_0; \quad M_z = M \sin i_0 \quad (6.28)$$

$i_0$  là góc giữa trục  $Ox$  và vectơ  $M$

Trường từ phức  $B_k = H_a + iZ_a$  thu được bằng cách vi phân biểu thức (6.27) theo biến số  $z$ :

$$b_k = \frac{\mu_0}{2\pi(x^2 + h^2)^2} (M_x + iM_z)(x - ih) \quad (6.29)$$

Phân chia phần thực và phần ảo của  $B_k$  và thay đổi dấu của  $Z_a$ , vì trục ảo đã được hướng lên trên, ta có:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi(x^2 + h^2)^2} [(h^2 - x^2) \sin i_0 - 2hx \cos i_0] \\ H_a &= -\frac{\mu_0 M}{2\pi(x^2 + h^2)^2} [(h^2 - x^2) \cos i_0 + 2hx \sin i_0] \end{aligned} \quad (6.30)$$

Trong trường hợp từ hoá cảm ứng, các thành phần của mô men từ  $M_z = M \sin i_0$  và  $M_x = M \cos i_0$  trong các biểu thức đó cần phải được thay bằng  $M_z = M \sin I_0$  và  $M_x = M \cos I_0 \cos \delta$  ( $\delta$  là góc giữa trục  $Ox$ , thẳng góc với đường phương của hình trụ, và kinh tuyến từ). Khi từ hoá thẳng đứng ( $I_0 = 90^\circ$ ) các công thức của  $H_a$  và  $Z_a$  đơn giản đi rất nhiều và có dạng:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi(h^2 + x^2)^2} (h^2 - x^2) \\ H_a &= -\frac{\mu_0 M}{\pi(h^2 + x^2)^2} hx \end{aligned} \quad (6.31)$$

Thành phần  $\Delta T_a$  có dạng:

$$\begin{aligned} (\Delta T)_a &= Z_a \sin I_0 + H_a \cos I_0 = \\ &= Z^{(0)} (\sin^2 I_0 - \cos^2 I_0 \cos \delta) + \\ &+ H^{(0)} (\sin I_0 \cos I_0 + \sin I_0 \cos I_0 \cos \delta) \end{aligned} \quad (6.32)$$

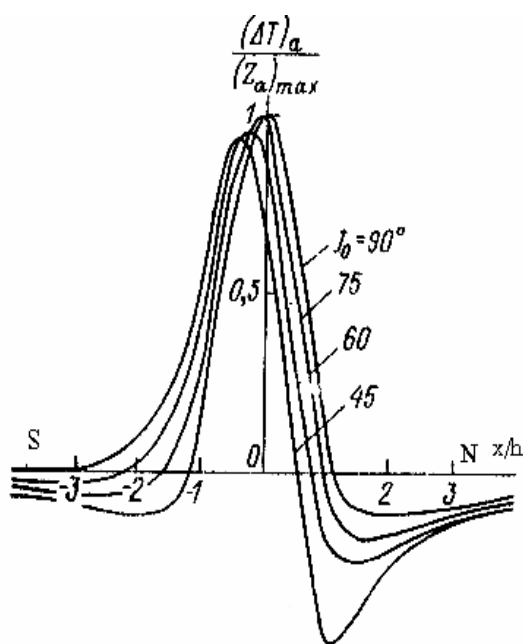
Ở đây để đơn giản,  $Z^{(0)}$  và  $H^{(0)}$  được xem như là giá trị của  $Z_a$  và  $H_a$  khi từ hoá thẳng đứng (các công thức (6.31)). Khi  $\delta = 0$  (khi đường phương của hình trụ chạy dọc theo phương vĩ tuyến) thì:

$$(\Delta T)_a = -Z^{(0)} \cos 2I_0 + H^{(0)} \sin 2I_0. \quad (6.33)$$

Tại vĩ độ bắc  $2I_0 > 90^\circ$ , khi  $\delta = 90^\circ$  (đường phương hướng dọc theo phương kinh tuyến)

$$(\Delta T)_a = Z_a \sin I_0.$$

Khi hình trụ bị từ hoá thẳng đứng  $Z_a = 0$  tại điểm  $x_0 = \pm h$ , còn  $H_a = 0$  tại điểm  $x_0 = 0$ . Các giá trị cực trị của  $Z_a$  có được tại các điểm  $(x_{\max})_Z = 0$  và  $(x_{\min})_Z = \pm \sqrt{3h}$  và tương ứng bằng  $2M/h^2$  và  $0,125 (2M/h^2)$ . Các giá trị cực trị của  $H_a$  tại các điểm  $\pm \sqrt{3h}/2$ , bằng khoảng 65 % giá trị của  $Z_{\max}$ .



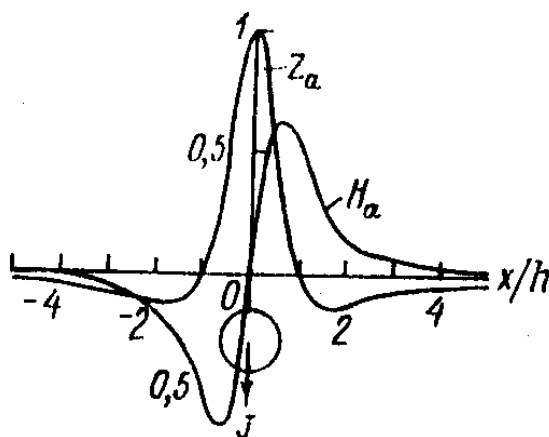
**Hình 6.9**

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên hình trụ tròn nằm ngang theo tuyến chạy dọc theo phương kinh tuyến

Khi từ hoá nghiêng:

$$(x_0)_Z = -h(\text{ctg}I_0 \sin \delta \pm \sqrt{\text{ctg}^2 I_0 \sin^2 \delta + 1}) \quad (6.34)$$

Khi từ hoá nghiêng, một trong các cực tiểu nằm trong phần của tuyến mà vectơ  $\vec{J}$  hướng vào sẽ lớn hơn cực tiểu khác. Cực tiểu bé trên đường cong  $Z_a$  ít khi xuất hiện rõ ràng.



Hình 6.10

Các đường cong  $Z_a$  và  $H_a$  trên hình trụ nằm ngang

Trong mặt phẳng thẳng đứng đi qua tuyến, các giá trị không của  $Z_a$  nằm trên các đường thẳng cắt nhau tại tâm tiết diện của hình trụ. Khi từ hoá thẳng đứng các đường thẳng đó sẽ tạo nên với trục  $Ox$  những góc  $\pm 45^\circ$ .

## 6.2.2 Bản mỏng bị từ hoá theo hướng cắ

Mô hình này tương ứng với lớp mỏng, có đường phương chạy dài ra vô cùng nhưng lại giới hạn theo hướng cắ. Trường hợp này tương ứng với sơ đồ nam châm hai chiều. Ta có thể xem mô hình tương đương với hai sợi dây cực nằm ngang cách nhau một khoảng  $2l$  và có từ khối ảo  $\pm m$  ứng với một đơn vị độ dài.

Thế từ do một yếu tố  $dl$  của một sợi dây gây nên là

$$dU = \frac{mdl}{4\pi r} \quad (6.35)$$

Chọn hướng của trục  $Ox$  vuông góc với đường phương của sợi dây, góc tọa độ nằm trên hình chiếu của sợi dây lên mặt  $xOz$ , hướng trục  $Oz$  xuống dưới, từ thế từ  $dU$  ta có thể tính được các thành phần cường độ  $dZ$  và  $dH$ , sau đó tiến hành tích phân theo  $l$  với các cận tích phân bằng vô cùng ta thu được các biểu thức của  $Z_a$  và  $H_a$ :



$$Z_a = \frac{\mu_0 m h}{2\pi(x^2 + h^2)} \quad (6.36)$$

$$H_a = -\frac{\mu_0 m x}{2\pi(x^2 + h^2)} \quad (6.37)$$

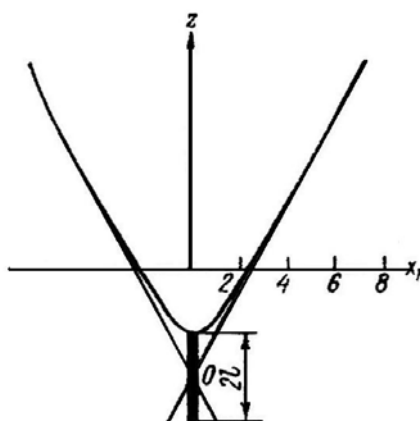
Trường từ phức do sợi dây cực gây ra có biểu thức rất đơn giản:

$$B_k = \frac{\mu_0 m}{2\pi(h + ix)} \quad (6.38)$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát các biểu thức  $Z_a$  và  $H_a$  do hai sợi dây cực (bản mỏng) gây ra, ta chọn gốc tọa độ tại điểm giữa của hình chiếu bản mỏng lên mặt phẳng  $xOz$ . Nếu gọi độ nghiêng của bản so với hướng nằm ngang bằng  $90^\circ - \theta$ , độ dài bằng  $2l$ , và hướng trục  $Oz$  xuống dưới, sử dụng công thức (6.36) và (6.37) ta có:

$$Z_0 = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \left[ \frac{h - l \cos \theta}{(x - l \sin \theta)^2 + (h - l \cos \theta)^2} - \frac{h + l \cos \theta}{(x + l \sin \theta)^2 + (h + l \cos \theta)^2} \right]$$

$$H_0 = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \left[ \frac{x - l \cos \theta}{(x - l \sin \theta)^2 + (h - l \cos \theta)^2} - \frac{x + l \cos \theta}{(x + l \sin \theta)^2 + (h + l \cos \theta)^2} \right]. \quad (6.39)$$



**Hình 6.11**

Quỹ tích của các điểm  $Z_a = 0$  trong mặt phẳng thẳng đứng trên lớp mỏng

Đối với các bản thẳng đứng, thì các công thức trên sẽ đơn giản hơn

$$Z_a = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \left[ \frac{h-1}{x^2 + (h-1)^2} - \frac{h+1}{x^2 + (h+1)^2} \right]$$

$$H_a = -\frac{\mu_0 m}{2\pi} \left[ \frac{x}{x^2 + (h-1)^2} - \frac{x}{x^2 + (h+1)^2} \right] \quad (6.40)$$

Từ các công thức (6.39) ta có thể dễ dàng tìm được phương trình để xác định vị trí của các điểm mà tại đó  $Z_a = 0$  trong mặt phẳng thẳng đứng:

$$z^2 + 2\operatorname{tg}\theta xz - x^2 - l^2 = 0 \quad (6.41)$$

Phương trình (6.41) là phương trình hyperbol, khi  $\theta = 0$  lập tức trở về dạng chính tắc:

$$\frac{z^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} = 1$$

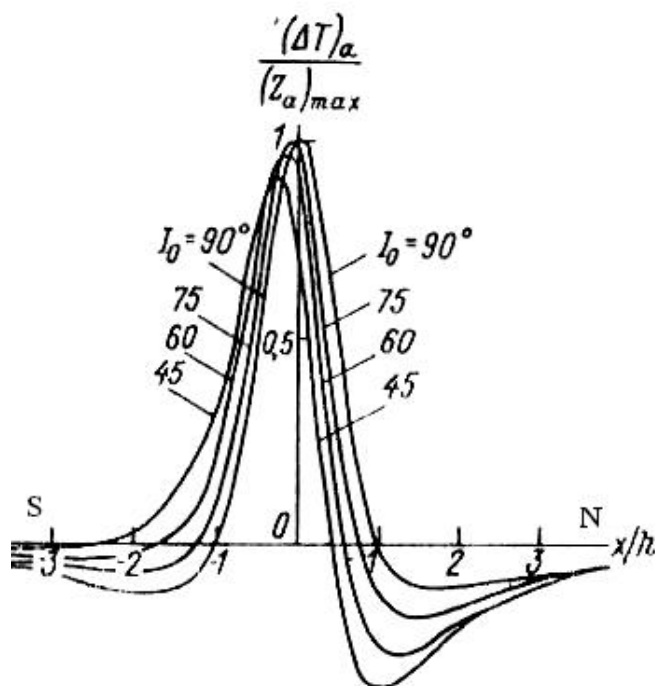
Các đường tiệm cận của hyperbol này  $z = \pm x$  là các đường thẳng mà trên đó có các giá trị không của  $Z_a$  do hình trụ tròn nằm ngang nằm giữa hai sợi dây cực bị từ hoá thẳng đứng gây ra. Đỉnh của hyperbol nằm trên trục thực  $Oz$  tại điểm  $z = l$  xác định vị trí của sợi dây cực trên trong mặt phẳng  $xoz$  đối với đường trung bình của bản mỏng (Hình 6.11).

Để đưa phương trình (6.41) về dạng chính tắc cần phải quay các trục tọa độ đi một góc  $\varphi$  nào đó. Các công thức biến đổi trong trường hợp này, như đã biết có dạng:

$$z' = z \cos \varphi - x \sin \varphi ;$$

$$x' = x \cos \varphi + z \sin \varphi$$

Sau khi thực hiện các tính toán cần thiết và cho hệ số của  $x$  và  $z$  bằng không, ta thu được  $\operatorname{tg}2\varphi = \operatorname{tg}\theta$ , từ đó  $\varphi = \frac{\theta}{2}$ .



**Hình 6.12**

Các đường cong  $(\Delta T)_a$  trên vĩa mỏng thẳng đứng dọc theo tuyến chạy theo phương kinh tuyến khi  $q = 0,5h$

Trục thực của hyperbol (6.41) chiếm vị trí trung bình giữa hình chiếu của bản mỏng lên mặt phẳng  $xOz$  và trục  $Oz$ . Phương trình chính tắc của hyperbol có dạng:

$$\frac{z^2}{l^2 \cos \theta} - \frac{x^2}{l^2 \cos \theta} = 1 \quad (6.42)$$

Đối với bản mỏng thẳng đứng đứng từ các công thức (6.40) ta có thể thu được

$$(x_0)_z = \pm \sqrt{h^2 - l^2} = \pm \sqrt{Hh}$$

trong đó  $H, h$  là các độ sâu đến mặt dưới và mặt trên của bản mỏng

Khi  $x=0$ ,  $Z_a$  đạt đến giá trị cực đại:

$$(Z_a)_{\max} = \frac{\mu_0 m 2l}{2\pi(h^2 - l^2)} = \frac{\mu_0 M}{2\pi(h^2 - l^2)}$$

Mômen từ có thể được xác định qua diện tích tiết diện ngang của vật thể và độ từ hoá của nó ( $M=JS$ )

Như Ianôpski đã chứng minh, trường từ của bản thẳng đứng tương đương với trường từ của hình trụ dạng ellip với điều kiện là khoảng cách giữa hai tiêu cự bằng độ dài của bản mỏng  $2l$ .

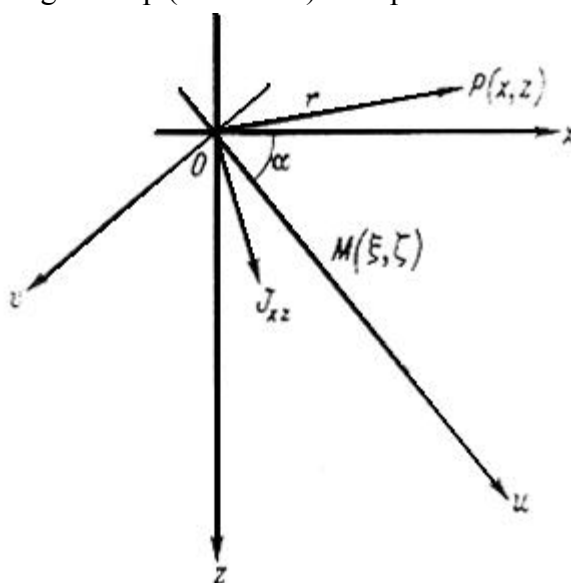
Trường  $(\Delta T)_a$  do bản mỏng thẳng đứng gây ra được trình bày trên (Hình 6.12)

### 6.2.3 Lớp cơ bản bị từ hoá bất kỳ

Lớp cơ bản là bản mỏng nghiêng có mặt dưới chạy xuống sâu vô cùng. Trong trường hợp này ta sẽ xét các công thức cần thiết cho các thành phần của trường từ qua thế từ phức. Thế phức do một yếu tố diện tích cơ bản  $dS$  tương ứng với công thức (6.26) có dạng:

$$dU_k = -\frac{J_k}{2\pi y} dS$$

trong đó  $y = (\xi - x) + i(\zeta - z)$ ;  $J_k$  là độ từ hoá phức bằng độ từ hoá thực  $J_{xz}$  trong mặt phẳng thẳng góc với đường phương của lớp (Hình 6.13). Thế phức của toàn vật thể là:



Hình 6.13

Tính  $Z_a$  và  $H_a$  cho lớp cơ bản.

$$U_k = -J_k \iint \frac{dS}{y}$$

Để tính được trường từ phức  $B_k$  ta cần phải vi phân hàm  $U_k$  theo biến số phức  $y$ :

$$B_k = \frac{\mu_0 J_k}{2\pi} \iint \frac{dS}{y^2}$$

Lấy đỉnh của lớp cơ bản làm gốc tọa độ, trục  $Oz$  hướng xuống dưới, trục  $Ox$  hướng sang phải. Để tính tích phân theo tiết diện ngang ta quay hệ thống tọa độ đã chọn một góc  $\alpha$  và thay các tọa độ của yếu tố mặt  $\xi, \zeta$  qua các tọa độ  $u$  và  $v$ . Phép quay này tương đương với phép nhân biến số phức cho  $e^{\alpha i}$

$$\xi + i\zeta = (u + iv)e^{\alpha i}$$

Nếu biểu diễn  $y$  qua tọa độ của yếu tố diện tích và điểm ngoài ta thu được:

$$B_k = \frac{\mu_0 J_k e^{-2\alpha i}}{2\pi} \iint_{u,v} \frac{du dv}{[(u + iv) - (x + iz)e^{-\alpha i}]^2}$$

Sau khi lấy tích phân theo u với cận từ 0 đến  $\infty$  ta thu được:

$$B_k = \frac{\mu_0 J_k e^{-2\alpha i}}{2\pi} \int \frac{dv}{iv - (x + iz)e^{-\alpha i}}$$

Để tính tích phân này ta cần đặt  $v=0$  và thay cho  $dv$  bằng độ rộng của lớp mỏng  $b$ :

$$B_k = -\frac{\mu_0 b J_k e^{-\alpha i}}{2\pi(x + iz)}$$

Chú ý rằng  $J_k = J_{xz} = J_x + iJ_z$ , sau khi phân chia phần thực và phần ảo đối với  $Z_a$  và  $H_a$  ta thu được các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[ (J_x \cos \alpha + J_z \sin \alpha) \frac{h}{x^2 + h^2} - \right. \\ &\quad \left. - (J_x \sin \alpha - J_z \cos \alpha) \frac{x}{x^2 + h^2} \right] \\ H_a &= \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[ (J_x \sin \alpha + J_z \cos \alpha) \frac{h}{x^2 + h^2} + \right. \\ &\quad \left. + (J_x \cos \alpha - J_z \sin \alpha) \frac{x}{x^2 + h^2} \right] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Các biểu thức trong ngoặc tròn là các thành phần của độ từ hoá  $J_{xz}$  trong mặt phẳng của lớp và trong hướng thẳng góc với mặt thẳng đó. Nếu lớp cơ bản bị từ hoá theo hướng cấm,

$$J_x \sin \alpha - J_z \cos \alpha = 0$$

lúc đó

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 b J_{xz} h}{2\pi(x^2 + h^2)} ; \\ H_a &= -\frac{\mu_0 b J_{xz} x}{2\pi(x^2 + h^2)} \end{aligned}$$

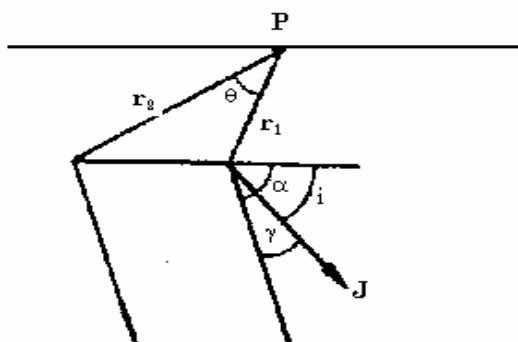
Như vậy lớp cơ bản bị từ hoá theo hướng cấm tạo nên trường từ tương đương với sợi dây cực (bản thẳng đứng có đường biên dưới nằm khá sâu). Một kết luận quan trọng: Tất cả các lớp cơ bản bị từ hoá theo hướng cấm, có các đường cong dị thường không khác nhau về dạng và như ta sẽ thấy sau này, kết luận đó cũng đúng đối với các lớp có độ dày lớn.

## 6.2.4 Lớp dày chạy xuống sâu vô cùng

Để tìm các công thức cho trường từ trong trường hợp này ta hãy dùng các biểu thức của gradient trọng lực dưới dạng:

$$V_{xz} = 2 \sin \alpha \left( -\sin \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} + \theta \cos \alpha \right)$$

$$V_{zz} = 2 \sin \alpha \left( -\cos \alpha \ln \frac{r_2}{r_1} - \theta \sin \alpha \right)$$



Hình 6.14

Lớp nghiêng dày có mặt dưới chạy xuống sâu vô cùng

trong đó thay cho  $f \sigma$  ta cho nó giá trị bằng 1, còn các ký hiệu còn lại được giải thích trên Hình 6.14.

Đặt gốc tọa độ trên tâm điểm mái của lớp (mặt trên của lớp) biểu diễn  $r_1$ ,  $r_2$  và  $\theta$  qua tọa độ của điểm ngoài và độ dày thấy được  $2b$  của lớp. Chú ý rằng:

$$J_x = \cos(\alpha - \gamma)$$

$$J_z = J \sin(\alpha - \gamma)$$

ta có thể tính được các thành phần của trường từ theo các công thức sau:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 j \sin \alpha}{2\pi} \left\{ [\sin(\alpha - \gamma) \cos \alpha - \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha] \ln \sqrt{\frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2}} + \right. \\ &\quad \left. + [\cos(\alpha - \gamma) \cos \alpha + \sin(\alpha - \gamma) \sin \alpha] \left[ \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} \right] \right\} \\ H_a &= \frac{\mu_0 j \sin \alpha}{2\pi} \left\{ [\sin(\alpha - \gamma) \sin \alpha - \cos(\alpha - \gamma) \cos \alpha] \ln \sqrt{\frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2}} + \right. \\ &\quad \left. + [\sin(\alpha - \gamma) \cos \alpha + \cos(\alpha - \gamma) \sin \alpha] \left[ \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Sau những phép tính để đơn giản các biểu thức, người ta thu được công thức cuối cùng của  $Z_a$  và  $H_a$ :

$$\begin{aligned}
Z_a &= \frac{\mu_0 \sin \alpha \cos \gamma}{2\pi} \left[ \left( \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \ln \frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2} \right] \\
H_a &= -\frac{\mu_0 \sin \alpha \cos \gamma}{2\pi} \left[ \left( \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \gamma \ln \frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Từ những công thức này ta thấy rõ ràng rằng dạng của đường cong  $Z_a$  và  $H_a$  không phụ thuộc vào góc cắm của lớp  $\alpha$ , đại lượng này chỉ xác định tỷ lệ thẳng đứng của các đường cong đó mà thôi. Khi  $\gamma=0$  (lớp bị từ hoá theo hướng cắm) ta có:

$$\begin{aligned}
Z_a &= \frac{\mu_0 J \sin \alpha}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} \right) \\
H_a &= -\frac{\mu_0 \sin \alpha}{2\pi} \ln \left[ \frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Nếu thay  $\operatorname{arctg} \frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-b}{h} = \operatorname{arctg} \frac{2bh}{x^2 + h^2 - b^2}$ , cho  $2b \rightarrow 0$  bỏ qua  $b^2$  và chú ý rằng  $\operatorname{tg}$  của góc bé bằng chính góc đó, ta có thể thu được biểu thức của lớp mỏng bị từ hoá theo hướng cắm.

Để xác định các cực trị  $Z_a$  ta hãy vi phân phương trình (6.45) theo  $x$ . Từ phương trình  $\frac{\partial Z_a}{\partial x} = 0$ , ta suy ra rằng

$$x_e = \operatorname{hctg} \gamma = \pm \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + h^2 + b^2} \tag{4.67}$$

Khi  $\gamma=0$  đường cong  $Z_a$  có một cực đại tại  $x_e=0$ .

Khi  $\gamma > 0$  (góc  $\alpha >$  góc  $i$  trên Hình 6.14):

$x_1 = \operatorname{hctg} \gamma + \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + h^2 + b^2}$  sẽ lớn hơn không, cực trị tương ứng với nó sẽ là cực tiểu, vì khi  $x > 0$  thì

$$\ln \frac{(x+b)^2 + h^2}{(x-b)^2 + h^2} > 0 \text{ còn}$$

$$x_2 = \operatorname{hctg} \gamma - \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma + h^2 + b^2} > 0$$

cực trị tương ứng với nó nằm về phía bên phải so với gốc tọa độ và là cực đại.

Khi  $\gamma < 0$ , tình thế lại đảo ngược. Như vậy, cực tiểu  $Z_a$  nằm về phía mà vector từ hoá  $J$  hướng vào đó. Trong (6.45) nếu thay hiệu các  $\operatorname{arctg}$  bằng một  $\operatorname{arctg}$  và đặt các hoành độ cực đại và cực tiểu vào trong biểu thức của  $Z_a$ , sau một vài biến đổi không phức tạp ta có thể thu được:

$$(Z_a)_{\min} + (Z_a)_{\max} = \frac{J \sin \alpha \cos \gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2bh}{h^2 - b^2}$$

Nếu trong biểu thức (6.45) đặt  $x=0$  thì ta cũng nhận được giá trị như trong vế phải của biểu thức trên nên từ đó ta có:

$$(Z_a)_{\max} + (Z_a)_{\min} = Z_a(0) \quad (6.48)$$

Biểu thức này cũng đúng với đường cong  $H_a$ . Vì  $Z_a$  và  $H_a$  là tổ hợp các hàm  $\arctg P(x)$  và  $\log_a Q(x)$  với các hệ số  $a_i, b_i$

$$\begin{aligned} Z_a &= a_1 P(x) + b_1 Q(x) \\ H_a &= a_2 P(x) + b_2 Q(x) \end{aligned} \quad (6.49)$$

và hàm  $(\Delta T)_a$  cũng vậy

$$(\Delta T)_a = a_2 P(x) + b_2 Q(x) \quad (6.50)$$

cho nên biểu thức (6.48) cũng đúng với  $(\Delta T)_a$ .

Các hệ số  $a_i$  và  $b_i$  được biểu diễn qua độ từ hoá  $J$ , các góc  $\alpha, \gamma, I_0$  và  $\delta$  như sau:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \cos \gamma \sin \alpha; & b_1 &= -\frac{\mu_0 J}{4\pi} \sin \gamma \sin \alpha \\ a_2 &= -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \sin \gamma \sin \alpha; & b_2 &= -\frac{\mu_0 J}{4\pi} \cos \gamma \sin \alpha \\ a_3 &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \sin \alpha (\cos \gamma \sin I_0 - \sin \gamma \cos I_0 \sin \delta) \\ b_3 &= -\frac{\mu_0 J}{4\pi} \sin \alpha (\sin \gamma \sin I_0 - \cos \gamma \cos I_0 \sin \delta) \end{aligned} \quad (6.51)$$

Nhờ có biểu thức (6.48) theo đường cong trường dị thường, ta có thể dễ dàng xác định được vị trí điểm giữa của mái (mặt trên) của lớp. Vì hàm  $\arctg$  là hàm chẵn không đổi dấu khi dấu của  $x$  thay đổi, còn hàm loga là hàm lẻ nên khi đặt lại gốc tọa độ tại điểm nằm trên điểm giữa của mái lớp thì ta luôn có các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} a_i P(x) &= \frac{F_i(x) + F_i(-x)}{2} \\ a_i Q(x) &= \frac{F_i(x) - F_i(-x)}{2} \end{aligned} \quad (6.52)$$

trong đó  $F_i(x)$  biểu thị một hàm bất kỳ trong số các hàm  $Z_a, H_a$  hoặc  $\Delta T$ . Nhờ có biểu thức (6.45) từ các đường cong dị thường ta có thể tách ra được các hàm  $\arctg$  hoặc loga, tương ứng với  $Z_a$  hoặc  $H_a$  của lớp bị từ hoá theo hướng cảm.

Các tỷ số của các hệ số  $a_1$  và  $b_1$  hoặc  $a_2, b_2$  xác định góc  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{2b_1}{a_1} = -\frac{a_2}{2b_2}.$$



Vì trong các điều kiện thực các hệ số đó chưa biết, góc  $\gamma$  có thể được xác định theo tỷ số giá trị các hàm arctg và loga tách ra được từ các đường cong dị thường với cùng một hoành độ  $x$ .

Để kết luận ta hãy khảo sát các điểm đặc trưng trên các đường cong loga và arctg . Đường cong  $P(x)$  có cực đại tại gốc tọa độ

$$P_{\max}(x) = 2\operatorname{arctg} \frac{b}{h}.$$

Nếu giải phương trình:

$$\operatorname{arctg} \frac{2bh}{x^2 + h^2 - b^2} = \operatorname{arctg} \frac{b}{h}$$

ta có thể xác định được giá trị của hoành độ  $(x_{0,5})_P$  :

$$(x_{0,5})_P = \pm \sqrt{h^2 + b^2}.$$

Đường cong  $Q(x)$  đạt đến các giá trị cực trị khi:

$$(x_e)_Q = \pm \sqrt{h^2 + b^2}$$

tức là tại các điểm mà tại đó  $P(x) = 0,5P(x)_{\max}$  . Giá trị của các cực trị  $Q(x)$ :

$$Q_e(x) = \pm \ln \frac{h^2 + b^2 + 2b\sqrt{h^2 + b^2}}{h^2 + b^2 - 2b\sqrt{h^2 + b^2}}$$

Đường cong môđun:

$$(\Delta T)_a = \sqrt{H_a^2 + Z_a^2} = \sqrt{[a_1 P(x) + b_1 Q(x)]^2 + [a_2 P(x) + b_2 Q(x)]^2}$$

đối xứng đối với điểm  $x=0$  và có cực đại tại  $x=0$ , do tính đối xứng của các đường cong  $H_a^2$  và  $Z_a^2$ .

Trường từ của lớp bị từ hoá nghiêng giới hạn theo hướng cảm bằng hiệu số trường gây ra do hai lớp có mặt dưới chạy sâu vào vô cùng gây ra.

## 6.2.5 Bậc

Mô hình bậc có giá trị quan trọng trong phương pháp trọng lực, trong thăm dò từ cũng đã được nhiều người khảo sát. Các biểu thức  $V_{xz}$  và  $V_{zz}$  của thể trọng lực do bậc thẳng đứng gây ra có dạng đơn giản nhất. Ta hãy chuyển sang khảo sát các thành phần của trường từ trong trường hợp này. Trong trường hợp khi  $J$  có hướng thẳng đứng ta có:

$$\begin{aligned}
Z_a &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x}{H} \right) = \\
&= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{(H-x)x}{(hH+x^2)} \\
H_a &= \frac{\mu_0 J}{4\pi} \ln \frac{x^2 + H^2}{x^2 + h^2} ; \tag{6.53}
\end{aligned}$$

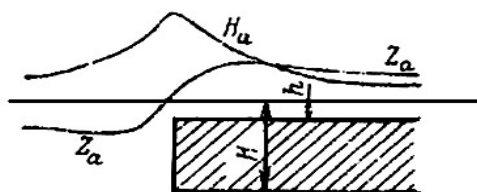
trong đó  $h$  và  $H$  là độ sâu đến mặt trên và mặt dưới của bậc, gốc tọa độ được chọn tại điểm nằm trên mặt thẳng đứng.

Từ các biểu thức (6.53) ta suy ra rằng:  $Z_a = 0$  khi  $x = 0$  và khi  $x = \pm\infty$ , còn

$$(x_e)_{Z_a} = \pm \sqrt{Hh} ,$$

từ đó

$$Z_{a \max} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{(H-h)\sqrt{Hh}}{2Hh} .$$



**Hình 6.15**

Các đường cong  $Z_a$  và  $H_a$  trên bậc thẳng đứng

Đường cong  $H_a$  có cực đại khi  $x = 0$ . Các hoành độ  $x_{0,5}$  trên đường cong  $H_a$  liên hệ với các độ sâu  $h$  và  $H$  qua biểu thức  $x_{0,5} = \pm \sqrt{Hh}$ , tức là trùng với các hoành độ cực trị của  $Z_a$ . Nếu khảo sát hoành độ  $H_a$  mà tại đó  $H_a = 0,25(H_a)_{\max}$ , ta thu được thêm một biểu thức để xác định các độ sâu  $H$  và  $h$ :

$$H + h = \frac{x_{0,25}^2 - x_0^2}{x_0}$$

còn  $J$  được xác định theo  $H$  và  $h$  như sau:

$$J = \frac{(H_a)_{\max}}{2(\ln H - \ln h)} .$$

Khi mình giải các đường cong  $Z_a$  ta có thể dùng các hoành độ  $x_{0,5}$  (gần với gốc tọa độ nhất), điểm mà tại đó  $Z_a = 0,5(Z_a)_e$ . Trong trường hợp đó tất cả ba thông số của bậc được xác định theo các hoành độ  $x_e$ ,  $x_{0,5}$  và giá trị  $(Z_a)_{\max}$ .

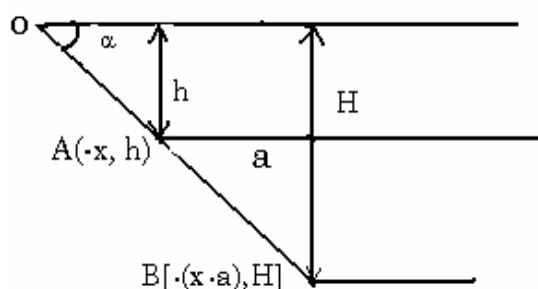
Khi  $x = \pm\infty$ ,  $Z_a = \pm \pi J$  và đại lượng  $2\pi J$  đặc trưng cho trường trên nửa mặt phẳng có độ từ hoá bằng  $J$ .  $Z_a$  cũng có số giá như vậy trên mặt tiếp xúc và khi  $h=0$ . Đối với bậc nghiêng các biểu thức của  $Z_a$  và  $H_a$  có dạng phức tạp hơn và là tổ hợp các hàm số arctg và lôga. Để tính được các biểu thức này người ta dùng biểu thức của lớp cơ bản và tiến hành tích phân.

Trong tích phân thứ nhất độ sâu của bản trùng với  $h$  và cận tích phân chạy từ 0 đến  $\infty$ , còn trong tích phân thứ hai độ sâu của bản bằng  $H$  và cận tích phân được tính từ  $(x-a)$  đến  $\infty$ .

Gốc tọa độ được đặt tại góc trên của bậc. Khi  $J$  có hướng bất kỳ, Lôgasôp đã tính được các công thức sau:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 J}{2\pi} \sin \alpha \left( P \cos \gamma + \frac{1}{2} Q \sin \gamma \right) \\ H_a &= -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \sin \alpha \left( P \sin \gamma - \frac{1}{2} Q \cos \gamma \right) \end{aligned} \quad (6.54)$$

trong đó  $P$  và  $Q$  là các hàm số



**Hình 6.16.**

Hình vẽ được dùng để tìm các công thức  $Z_a$  và  $H_a$

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{arctg} \frac{x}{h} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{H}; \\ Q &= \ln \frac{H^2 + (x-a)^2}{h^2 + x^2} \end{aligned} \quad (6.55)$$

$\alpha$  là góc cảm của mặt nghiêng của bậc,  $\gamma$  là góc giữa mặt nghiêng của bậc và hình chiếu của vectơ lên trên mặt phẳng thẳng góc với đường phương của bậc. Góc này dương nếu góc lệch của hình chiếu  $J$  lên trên mặt phẳng thẳng góc với đường phương lớn hơn góc  $\alpha$ . Cần thấy rằng, cũng như trong trường hợp lớp nghiêng, khi  $\gamma = 0$  (bậc bị từ hoá dọc theo mặt

ngiêng) trường của bậc nghiêng không khác với trường của bậc thẳng đứng bị từ hoá thẳng đứng. (Biểu thức (6.53)).

### 6.2.6 Bản mỏng nằm ngang

Mô hình này tương ứng với lớp nằm ngang hoặc thấu kính mỏng do các đá có từ tính gây nên. Để tìm các công thức tính  $t_a$  sử dụng các biểu thức  $Z_a$  và  $H_a$  tương ứng với lớp thẳng đứng, bị từ hoá theo hướng cấm. Vì phân các biểu thức này theo  $z$  rồi đem kết quả nhân cho  $\Delta h$  (độ dày của bản mỏng) ta thu được các biểu thức sau:

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi} \frac{(h^2 + b^2 + x^2) \cos \gamma - 2hx \sin \gamma}{[(x-b)^2 + h^2][(x+b)^2 + h^2]} \\ H_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi} \frac{-(h^2 + b^2 - x^2) \cos \gamma + 2hx \sin \gamma}{[(x-b)^2 + h^2][(x+b)^2 + h^2]} \end{aligned} \quad (6.56)$$

trong đó  $M = J2b\Delta h$  là mô men từ của bản mỏng.

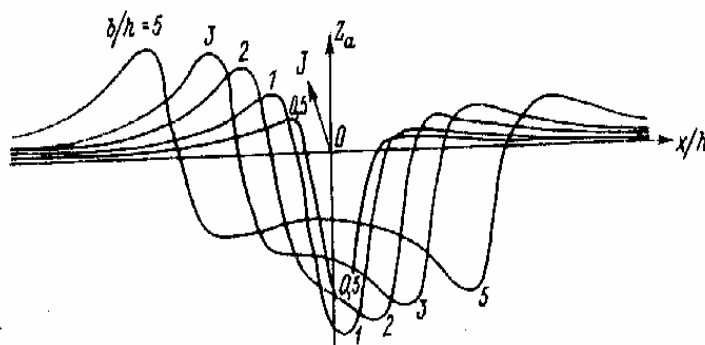
Khi vật bị từ hoá thẳng đứng ( $\gamma = 0$ ), các công thức sẽ được đơn giản đi.

$$\begin{aligned} Z_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi} \frac{h^2 + b^2 - x^2}{[(x-b)^2 + h^2][(x+b)^2 + h^2]} \\ H_a &= \frac{\mu_0 M}{2\pi} \frac{hx}{[(x-b)^2 + h^2][(x+b)^2 + h^2]} \end{aligned} \quad (6.57)$$

Để xác định vị trí của các điểm đặc trưng  $Z_a$  ta cho tử số trong các biểu thức (6.57) bằng không:

$$(x_0)_z = \pm \sqrt{h^2 + b^2}$$

và tính đạo hàm



**Hình 6.17**

Các đường cong  $Z_a$  trên bản mỏng nằm ngang khi từ hoá ngược tương ứng các nửa độ dày  $b$  khác nhau.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\mu_0 M}{2\pi} \left\{ \frac{h^2 - (x+b)^2}{[(x+b)^2 + h^2]^2} - \frac{h^2 - (x-b)^2}{[(x-b)^2 + h^2]^2} \right\}$$

Cho đạo hàm này bằng không, trong trường hợp tổng quát ta xác định được năm nghiệm:

$$x_1 = 0; \quad x_{2-5} = \pm \sqrt{h^2 + b^2} \pm 2h\sqrt{h^2 + b^2}$$

Nếu thay  $\sqrt{h^2 + b^2}$  bằng  $(x_0)_Z$ , ta có thể biểu thị các giá trị này khác đi:

$$x_1 = 0; \quad x_{2-5} = \pm \sqrt{x_0^2} \pm 2hx_0 \quad (6.58)$$

Có năm nghiệm thực tương ứng với năm cực trị khi thỏa mãn điều kiện  $x_0 > 2h$ , tức là khi  $2b > 2\sqrt{3}h$ . Trong trường hợp này  $x_1$  tương ứng với cực tiểu,  $x_{2,3} = \pm \sqrt{x_0^2 - 2hx_0}$  tương ứng với các cực đại, còn  $x_{4,5} = \pm \sqrt{x_0^2 + 2hx_0}$  tương ứng với các cực tiểu, có giá trị âm. Trong trường hợp có ba nghiệm  $x_1$  sẽ tương ứng với cực đại còn  $x_{2,3}$  tương ứng với các cực tiểu.

Ta cũng tiến hành nghiên cứu tương tự với đường cong  $H_a$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{M\mu_0}{2\pi} \left\{ \frac{(x-b)h}{[(x-b)^2 + h^2]^2} - \frac{(x+b)h}{[(x+b)^2 + h^2]^2} \right\} \quad (6.59)$$

Từ đó ta có hai nghiệm thực

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{(h-b)^2 + 2\sqrt{h^4 + h^2b^2 + b^4}} \quad (6.60)$$

Các nghiệm này tương ứng với cực đại ( $x < 0$ ) và cực tiểu ( $x > 0$ ).

### 6.3 Bài toán tính hiệu ứng trường từ đối với các vật thể có dạng bất kỳ

#### 6.3.1 Khái niệm

Khi vật thể có dạng phức tạp, người ta không thể biểu diễn các thành phần trường từ của chúng qua các biểu thức giải tích của các hàm cơ bản mà thường phải tiến hành tính tích phân bằng số các công thức (1.45) và (1.46)

$$U = -\frac{\vec{J}}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}V} = -\frac{\vec{J}}{4\pi} \overrightarrow{\text{grad}} \int \frac{dm}{r}$$

hoặc

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{\vec{J}\vec{n}}{r} dS = \frac{J}{4\pi} \iint_s \frac{\cos \varphi}{r} ds.$$

Công thức đầu biểu thị sự liên hệ giữa thế từ và thế trọng lực, cho phép tính toán các trường từ qua trường trọng lực nếu như biết được các giá trị của J. Công thức thứ hai cho phép tính các thành phần của trường từ qua thế từ của lớp đơn giản do các từ khối ảo gây nên. Mật độ từ khối ảo này thay đổi từ điểm này sang điểm khác, đồng thời liên hệ với độ từ hoá J và hình dáng của mặt qua biểu thức:

$$\sigma = J \cos \varphi$$

trong đó  $\varphi$  là góc giữa hướng của J với pháp tuyến ngoài của vật thể tại điểm khảo sát.

Hiện nay có rất nhiều phương pháp tính theo phương hướng này. Người ta có thể thực hiện các phép tính trên các máy tính hoặc trong trường hợp thiếu thiết bị người ta có thể dùng các palet. Có rất nhiều chương trình tính khác nhau tại các trung tâm tính toán địa vật lý trên toàn thế giới. Sự khác nhau chủ yếu giữa các chương trình tính là do các phương pháp phân chia gần đúng các vật thể gây nên dị thường và dạng của các công thức xuất phát đã được đề cập ở trên. Các phương pháp phân chia các vật gây dị thường có thể là :

- Chia vật thể ra thành các hình hộp.
- Chia ra thành các lăng trụ thẳng đứng hoặc nằm ngang.
- Chia vật thể hai chiều ra thành nhiều đa giác.
- Chia vật thể thành nhiều thanh hình trụ.

Thanh hình trụ là vật thể có mặt trên và mặt dưới được giới hạn bởi các phương trình  $z_{1,2} = f(x, y)$  và có hình chiếu dạng bất kỳ trên mặt phẳng nằm ngang.

Độ chính xác của các phép tính lý thuyết này trước hết do sai số tiệm cận mô hình quyết định. Sai số do việc tiệm cận với mặt vật lý cũng có vai trò quan trọng. Những vấn đề trên cần được chú ý khi hình thành các mô hình tính toán lý thuyết.

Dưới đây ta hãy khảo sát một palet được dùng để tính các hiệu ứng từ.

### 6.3.2 Palet Micôp

Chia tiết diện ngang của vật thể hai chiều ra thành các yếu tố diện tích cơ bản mà hiệu ứng từ do mỗi vật thể cơ bản có diện tích tiết diện ngang  $dS$  gây ra có thể được xem tương đương với hình trụ tròn nằm ngang bị từ hoá thẳng đứng: (Hình 6.18)

$$dZ = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{h^2 - x^2}{r^4} dM = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{r^2} dM$$

$$dH = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{hx}{r^4} dM = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^2} dM . \quad (6.61)$$

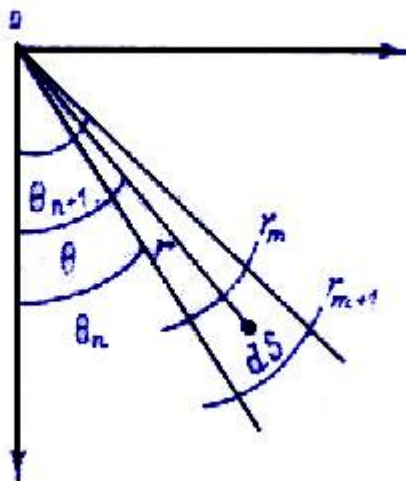
Trong tất cả các biểu thức (6.61),  $r$  là bán kính vòng tròn, đi qua  $dS$ ,  $\theta$  là góc giữa  $r$  và trục thẳng đứng. Tích phân được thực hiện trong hệ thống tọa độ trụ ( $dS = r dr d\theta$ ).

Kết quả ta có

$$\Delta Z = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} \cos 2\theta d\theta \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} (\sin 2\theta_{n+1} - \sin 2\theta_n) \ln \frac{r_{m+1}}{r_m}$$

$$\Delta H = \frac{-\mu_0 J}{2\pi} \int_{\theta_n}^{\theta_{n+1}} \sin 2\theta d\theta \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} (\cos 2\theta_{n+1} - \cos 2\theta_n) \ln \frac{r_{m+1}}{r_m}. \quad (6.62)$$

Để đơn giản khi tính toán ta thường chọn các thông số sao cho hiệu ứng  $\Delta Z$ ,  $\Delta H$  của các vật thể yếu tố tại điểm  $O$  như nhau.



Hình 6.18

Hình vẽ được dùng để tính công thức (6.62)

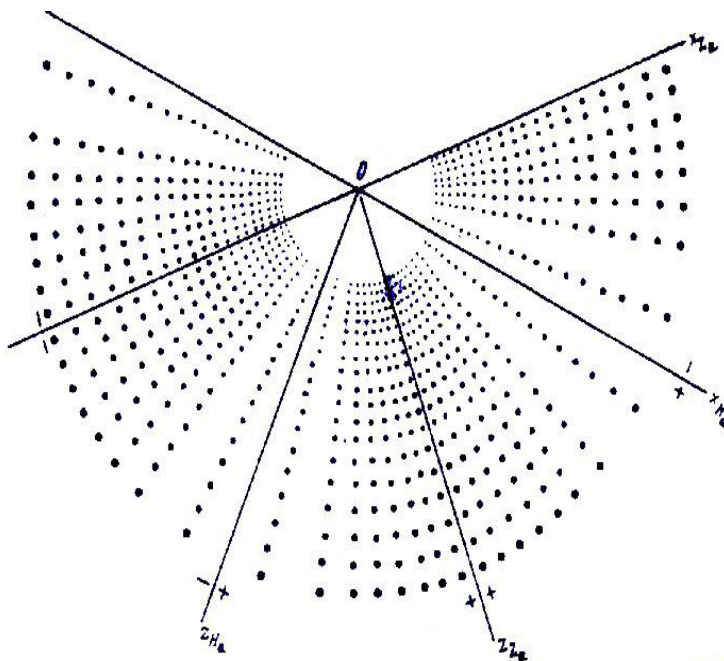
Theo các công thức này Micóp đã xây dựng được palet (H.6.19) để tính  $Z$ ,  $H$  cho các vật thể hai chiều.

Trong trường hợp từ hoá nghiêng các biểu thức (6.61) có dạng:

$$dZ = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sin(i - 2\theta)}{r^2} dM = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\cos(2\theta + \varphi)}{r^2} dM$$

$$dH = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\cos(i - 2\theta)}{r^2} dM = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sin(2\theta + \varphi)}{r^2} dM \quad (6.63)$$

trong đó  $i$  là góc giữa vectơ từ hoá và trục  $ox$  trong mặt phẳng đi qua tuyến, còn  $\varphi$  là góc phụ với nó.



**Hình 6.19**

Palet Mi cốp

Từ đó ta suy ra có thể sử dụng palet Micốp kẻ trên để xác định hiệu ứng từ trong trường hợp từ hoá nghiêng. Trong trường hợp đó cần phải quay trục thẳng đứng về phía J một góc bằng  $\frac{\varphi}{2}$ .

Palet Micốp được trình bày trên Hình 6.19.

Cách sử dụng palet Micốp như sau :

Vẽ tiết diện ngang của vật thể hai chiều trên trang giấy, rồi sau đó đặt tâm O của palet tại điểm cần tính trường với việc định hướng các trục tương ứng. Tại mỗi một điểm đếm số chấm trên palet nằm trong giới hạn của tiết diện ngang của vật thể. Số các chấm này là giá trị cần xác định của trường tại điểm tương ứng.