Chương 8. **Cơ sở lý thuyết về các biến đổi trường từ**

Tôn Tích Ái

Địa từ và thăm dò từ. NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006.

Từ khoá: Địa từ và thăm dò từ, Trường từ, Phổ, Phép lọc, Phép trung bình hoá, Trend .

Mục lục

Chương 8

Cơ sở lý thuyết về các biến đổi trường từ

Mỗi một phép biến đổi trường địa vật lý nói chung, trường từ nói riêng bao gồm việc biến đổi các giá trị xuất phát của chúng thành các giá trị khác nhờ một thuật toán đặc biệt.

Biến đổi các trường địa vật lý được sử dụng để giải quyết các nhiệm vụ khác nhau:

1. Tính các đặc trưng bằng số của trường từ được khảo sát (các thành phần của phổ, gradient của trường,...) trên toàn bộ diện tích nghiên cứu hoặc trên một phần nào đó.

2. Tăng trưởng hay làm yếu đi ảnh hưởng của các đối tượng địa chất có kích thước và độ sâu khác nhau tạo nên trường tổng cộng.

3. Loại bỏ ảnh hưởng của các nhiễu ngẫu nhiên đối với trường cần nghiên cứu cũng như tách các dị thường yếu trên phông nhiễu.

4. Chuyển từ một thành phần trường này sang thành các thành phần trường khác (Ví dụ chuyển từ Z_a thành H_a hoặc từ $(\Delta T)_a$ thành Z_a).

5. Tách các dị thường địa phương hoặc sử dụng trực tiếp các giá trị đã được biến đổi để xác định các thông số của mô hình vật lý (minh giải định lượng các số liệu từ).

6. Nghiên cứu cấu trúc của trường từ trong nửa không gian trên (đối với nguồn trường gần nhất).

Rất nhiều công trình nghiên cứu khoa học liên quan đến vấn đề đã được công bố.

8.1 Biểu diễn phổ các hàm số và các quá trình ngẫu nhiên

8.1.1 Biểu diễn các hàm số bằng chuỗi và tích phân Fourier

Như từ toán học đã biết hàm f(t) bất kỳ thỏa mãn điều kiện Dirichslet có thể được biểu diễn dưới dạng sau trong khoảng từ $-\frac{T}{2}$ đến $\frac{T}{2}$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right) \tag{8.1}$$

trong đó $\frac{2\pi kt}{T}$ là tần số góc ω_k đo bằng radient/s và là bội của tần số cơ sở $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, còn các hệ số a_k và b_k được xác định bằng các công thức Euler – Fourier

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega_0 kdt \;;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\omega_0 kdt \;. \tag{8.2}$$

Nếu hàm f(t) chẵn, tức là $f(t) = f(-t)$, tất cả các hệ số b_k đều bằng không. Trường hợp f(t) là hàm số lẻ $f(t) = -f(-t)$ thì tất cả a_k bằng không.

Trong trường hợp tổng quát như ta có thể suy từ biểu thức (8.1) có thể biểu diễn một hàm bất kỳ ở dạng tổng các thành phần chẵn lẻ.

Nếu dùng công thức Euler ta có thể viết (8.1) dưới dạng phức:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i\omega_k t} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k + ib_k}{2}e^{-i\omega_k t} \tag{8.3}$$

Nếu thay đổi dấu trong tổng thứ hai và lúc đó tính đến tính chẵn và lẻ của các hệ số a_k và b_k ta có thể viết lại biểu thức (8.3) dưới dạng sau:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty}\frac{a_k - ib_k}{2}e^{i\omega_k t}$$

Nếu ký hiệu

$$S_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \tag{8.4}$$

và chú ý rằng $S_0 = \frac{1}{2}a_0$, cuối cùng ta có thể viết

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} S_k e^{i\omega_k t} \tag{8.5}$$

Đặt vào đẳng thức (8.4) các giá trị a_k và b_k từ biểu thức (8.2), và sau những biến đổi không phức tạp ta có thể thu được

$$S_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega_k t}dt \tag{8.6}$$

Các biểu thức (8.5) và (8.6) là cặp biến đổi Fourier gián đoạn liên quan với nhau. Toàn bộ S_k được gọi là phổ phức một chiều của hàm số f(t):

$$S_k = |S_k| e^{-i\varphi_k} \tag{8.7}$$

Các môđun S_k tạo nên thành phần phổ biên độ,giá trị của chúng theo (8.4) có dạng: $|S_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, còn thành phần pha của phổ là giá trị $\varphi_k = \mathrm{arctg}\frac{a_k}{b_k}$

Từ biểu thức (8.7) ta suy ra rằng, các phổ biên độ và tần số của hàm số được biểu diễn bằng chuỗi Fourier ở dạng phức đối xứng đối với tần số không mà tại đó biên độ bằng (1/2) a_0 còn pha bằng $\varphi_0 = 0$. Biên độ $|S_k|$ dương đối với cả tần số dương và âm, còn pha dương đối với tần số dương, và âm đối với tần số âm. Mỗi một phổ dao động sau lệch pha với phổ dao động trước và sự lệch pha âm tương ứng với sự dịch chuyển các hài về phía trị dương của t (trong trường hợp này mỗi một hài sau lại chậm so với hài trước).

Nếu như tích phân

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| f(t)^2 dt \right|$$

tồn tại thì độ lệch bình phương trung bình f(t) đối với khai triển dạng (8.1) và (8.2) sẽ cực tiểu trong trường hợp khi các giá trị a_k, b_k và S_k được xác định bằng các công thức (8.2) và (8.6), còn chính các gía trị a_k, b_k và S_k có xu hướng tiến tới không khi số sóng k tăng (Định lý Reeman- Lebeg). Trong trường hợp đó (Định lý Parsevale) ta có :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2 \tag{8.8}$$

Phổ biên độ thường được gọi là phổ năng lượng, vì tổng các bình phương các biên độ trong khai triển (8.8) biểu thị năng lượng chung của quá trình. Nếu đặt giá trị S_k từ đẳng thức (8.6) vào (8.5) ta có

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 kt} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_0 kt} dt \tag{8.9}$$

trong đó thay cho ω_k người ta dùng $\omega_0 k$.

Nếu tăng khoảng tích phân (-T/2, T/2) đến vô cùng, hàm f(t) biến thành hàm không có chu kỳ (khi khoảng tích phân giới nội f(t+mT) = f(t)). Khoảng cách giữa các hài kế tiếp nhau được xác định bằng tần số cơ sở $\omega_0 = 2\pi/T$, lúc đó sẽ tiến tới không, còn tích $\omega_0 k$ trở thành tần số góc ω thay đổi liên tục. Đưa các thay đổi tương ứng vào biểu thức (8.9) và đặt 1/T như $d\omega/2\pi$ ta có

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{8.10}$$

Tích phân thứ hai được xem như phổ S(ω) liên tục và như vậ có thể biểu diễn f(t) dưới dạng

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{8.11}$$

trong đó

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{8.12}$$

Các biểu thức (8.11) và (8.12) là cặp biến đổi Fourier của hàm không chu kỳ. Nhiều khi người ta viết chúng dưới dạng đối xứng bằng cách dùng cùng một hệ số nhân trước tích phân $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Sự khác nhau có tính nguyên tắc giữa phổ của các hàm không chu kỳ thu được từ các biến đổi Fourier đối với phổ phức gián đoạn (trong khai triển thành chuỗi Fourier) ở chỗ trong trường hợp đầu sự thay đổi tần số xảy ra liên tục. Biên độ phức dS của mỗi một dao động riêng biệt vô cùng bé và bằng $dS = \frac{1}{\pi}S(\omega)d\omega$. Từ đó:

$$S(\omega) = \frac{\pi dS}{d\omega} \tag{8.13}$$

Từ phương trình (8.13) ta thấy rằng S(ω) tương ứng với tần số ω cho trước là mật độ phổ biên độ trong khoảng dω.

Nếu trong (8.12) thay hàm số mũ bằng các hàm lượng giác theo công thức Euler ta có thể viết:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int f(t)\cos\omega d\omega - i\int f(t)\sin\omega d\omega = \\ &= A(\omega) + iB(\omega) = |S(\omega)|e^{-i\varphi} = |S(\omega)|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Trong biểu thức này tích phân đầu tiên là biến đổi cosin Fourier (thuộc phần chẵn của hàm số f(t)), còn tích phân thứ hai biến đổi sin Fourier (thuộc phần lẻ của hàm f(t)). Biến đổi f(t) dưới dạng thực có dạng:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega t - B(\omega)\sin\omega t]d\omega \tag{8.15}$$

Đôi khi trong khi biến đổi để cho thuận tiện người ta chuẩn hóa sao cho

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = 1.$$

Trong trường hợp đó

$$\int |S(\omega)|^2 d\omega = \pi \; .$$

Phổ pha φ(ω) được xác định bằng argument S(ω) và có giá trị bằng $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\frac{B(\omega)}{A(\omega)}$.

Khi phân tích phổ các trường địa vật lý cho trường hợp bài toán hai chiều, biến số t lúc này được thay bằng biến x (khoảng cách giữa các điểm quan sát), thì ω có thứ nguyên là nghịch đảo với khoảng cách (tần số không gian) được biểu diễn bằng radian/km hoặc radian/m. Khi biểu diễn phổ thay cho tần số góc ω ta có thể dùng tần số $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Đối với chuỗi Fourier, ω_0 sẽ được xác định bằng 2π/L, trong đó L chiều dài tuyến mà trên đó ta xác định được hàm f(x).

Có thể tiến hành biến đổi Fourier đối với hàm số có nhiều biến số. Đặc biệt đối với trường địa vật lý được biểu diễn dưới dạng hàm f(x, y) ta có:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(u,v)e^{i(ux+vy)}dudv$$

$$S(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}dxdy \qquad (8.16)$$

trong đó S(u, v) là phổ phức của hàm số f(x, y) trong miền tần số không gian u và v. Trong hệ thống tọa độ cực (r, φ) và (ρ, θ)

$$f(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} S(\rho,\theta)e^{i\rho r\cos(\theta-\varphi)}\rho d\rho d\theta$$

$$S(u,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(r,\varphi)e^{i\rho r\cos(\theta-\varphi)}rdrd\varphi \qquad (8.17)$$

trong vế trái và vế phải của khai triển (8.17) nếu ta tiến hành tính tích phân theo φ và theo θ, và đưa vào ký hiệu:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\varphi)d\varphi$$

$$S(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(\rho,\theta)d\theta, \qquad (81.8)$$

sau khi phân chia các biến số ta nhận được biểu thức của f(r)

$$f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} S(\rho)\rho d\rho\int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\varphi)}d\varphi \qquad (8.19)$$

tích phân thứ hai trong biểu thức này với hệ số (1/2π) là hàm số trụ Bessel hạng không:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{\pm i\rho r\cos(\theta-\varphi)}d\varphi = J_0(\rho,r)$$

từ đó

$$f(r) = \int_0^{\infty} S(\rho)J_0(\rho,r)\rho d\rho \qquad (8.20)$$

tương tự :

$$S(\rho) = \int_0^{\infty} f(r)J_0(\rho,r)rdr. \qquad (8.21)$$

Các biểu thức (8.20) và (8.21) là biến đổi Henkel hạng không. Nhờ nó mà ta có thể biến đổi bài toán hai chiều với hàm hai tọa độ thành bài toán một chiều bằng cách sử dụng các giá trị trung bình theo vòng tròn của hàm hai chiều.

8.1.2 Các tính chất cơ bản của phép biến đổi phổ

** Tính tuyến tính của* các *biến đổi Fourier*

Biến đổi Fourier là phép biến đổi tuyến tính, tức là phổ của tổng các hàm bằng tổng phổ của các hàm riêng biệt

$$S_{\Sigma}(\omega) = \sum S_k(\omega)$$

Khảo sát biểu thức (8.14) ta thấy rằng:

$$A(\omega) = A(-\omega)\ ;\ B(\omega) = -B(-\omega)\ ;\ \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$$

$$A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt,\quad B(0) = 0;\quad \varphi(0) = 0$$

Từ đó ta suy ra rằng phần thực của phổ là hàm số chẵn của tần số, phổ pha là hàm số lẻ của tần số. Từ các biểu thức (8.14) ta cũng suy ra rằng, các hàm f(t) và f(-t) tương ứng với các phổ liên hợp $S(\omega)$ và $\overline{S(\omega)}$

** Phổ đạo hàm*

Tương ứng với biểu thức (8.2)

$$S'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

tích phân theo từng phần ta thu được:

$$S'(\omega) = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

vì hàm f(t) điều hòa tại vô cùng (trong trường hợp ngược lại đối với hàm đó ta không áp dụng được phép biến đổi Fourier), nên số hạng thứ nhất trong tổng bên phải phải bằng không và vì vậy:

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega)$$

Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh được:

$$S^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n S(\omega)$$

**Định lý về tỷ lệ xích.*

Nếu trong hàm f(t) thay t bằng mt thì sự thay thế này tương đương với sự thay đổi tỷ lệ xích ngang trong khi vẽ f(t). Tích f(t)dt khi đó không thay đổi, các giá trị của hàm số lúc đó cần phải được nhân cho cùng một hệ số m. Vì vậy, phổ của hàm f(t) trong tỷ lệ xích mới có thể được viết dưới dạng:

$$S_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(mt)e^{-\frac{\omega}{m}mt}d(mt) = S\left(\frac{\omega}{t}\right) \qquad (8.22)$$

Từ biểu thức này ta thấy rằng, tỷ lệ xích của phổ trên trục tần số tỷ lệ nghịch với tỷ lệ xích trên trục t ; Khi hàm f(t) giãn ra thì phổ của nó co lại, khi hàm co thì ngược lại phổ lại giãn. Điều đó có nghĩa là tín hiệu trên trục t càng ngắn thì phổ của nó càng dài và ngược lại.

** Định lý về sự* dịch *chuyển*

Khi dịch chuyển hàm f(t) một khoảng τ trên trục t:

$$S_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau) e^{-i\omega t} dt$$

Nếu thay t+τ bằng θ, ta thu được:

$$S_\tau(\omega) = e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta$$

Tích phân theo θ bằng phổ của hàm không bị dịch chuyển vì vậy phụ thuộc vào dấu của τ ta có:

$$S_\tau(\omega) = S(\omega) e^{\pm i\omega\tau} \qquad (8.23)$$

Sử dụng biểu thức (8.14):

$$S(\omega) = A(\omega) + iB(\omega) = |S(\omega)|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ta dễ dàng chứng minh rằng phần biên độ của phổ khi dịch chuyển tín hiệu theo trục t không thay đổi, còn phần pha dịch chuyển một khoảng ±ωτ

$$\varphi_\tau(\omega) = \varphi(\omega) \pm \omega\tau \qquad (8.24)$$

Điều này có nghĩa là trong phổ đã xuất hiện phần tuyến tính đã xuất hiện trong đó, độ lệch của nó đối với trục t được xác định bởi giá trị và dấu của khoảng τ. Lúc đó đối với hàm số chẵn f(t) đối xứng đối với điểm t = τ, đường thẳng này đi qua gốc tọa độ trong miền tần số, còn đối với hàm số lẻ đường thẳng đi qua các điểm ± π/2.

**Định lý Reili*

Cho trước hai hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$. *Đối* với hàm thứ nhất:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1 e^{i\omega t} d\omega \qquad (8.25)$$

Nếu nhân hai vế của *phương* trình cho $f_2(t)dt$ và lấy tích phân tại các cận vô cùng, ta thu được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Nếu thay đổi thứ tự lấy tích phân trong vế phải, ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(-\omega) d\omega$$

Sử dụng biểu thức (8.14), phân chia phần thực và phần ảo, đối với phần thực ta thu được:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_1(\omega)| |S_2(\omega)| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) d\omega$$

Từ đó khi $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ ta có:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)| d\omega \tag{8.26}$$

Theo ý nghĩa vật lý $S(\omega)\ S(-\omega) = |S(\omega)|^2$ là mật độ phổ năng lượng và định lý Reili tương đương với định lý Parseval đối với hàm tuần hoàn. Từ đó ta suy ra rằng có thể thu được phổ năng lượng bằng cách tính tích phân bình phương môđun của phổ.

*Định lý Borell .Tích phân chập của hai hàm f(t) và h(t) được xác định như sau:

$$F(t) = f(t) * h(t) = \int_a^b f(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_a^b f(\tau) h(t-\tau) d\tau \tag{8.27}$$

Nếu tích phân trong (8.27) tồn tại thì đẳng thức trên cũng đúng khi cận bằng vô cùng. Ta hãy tính phổ của tích phân chập, nhân vế trái và phải của đẳng thức (8.27) cho $e^{-i\omega t}$ dt và tính tích phân các biểu thức thu được ở các cận vô cùng:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Đặt $t-\tau = \theta$ và thay đổi thứ tự tính tích phân, ta thu được:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} h(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(\theta) d\theta$$

Cả hai tích phân đều là phổ của các hàm số. Tích phân đầu là phổ của hàm $h(\tau)$, tích phân sau là phổ của hàm $f(t-\tau)$.

Nếu ký hiệu chúng tương ứng bằng $H(\omega)$ và $S_0(\omega)$ ta thu được:

$$S(\omega) = S_0(\omega)\ H(\omega) \tag{8.28}$$

Đối với hàm hai biến, tích phân chập có dạng:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, y-\eta) h(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{8.29}$$

theo lý thuyết về tích phân chập ta có thể viết:

$$S(u,v) = S_0(u,v)H(u,v) \tag{8.30}$$

Lý thuyết về tích phân chập có giá trị rất quan trọng trong khi khảo sát sự biến đổi các trường địa vật lý. Trong trường hợp tổng quát (bài toán một chiều) trường được biến đổi F(t) có thể được biểu diễn dưới dạng biến đổi tích phân:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{8.31}$$

tức là dưới dạng tích chập của hai hàm số: f(t-τ) trường xuất phát, h(τ) là nhân hoặc đặc trưng chuyển của phép biến đổi. Tỷ số giữa phổ của F(t) hoặc của F(x, y) với phổ của trường xuất phát được gọi là đặc trưng tần số của phép biến đổi:

$$H(\omega) = \frac{S(\omega)}{S_0(\omega)}$$

$$H(u,v) = \frac{S(u,v)}{S_{0(u,v)}} \tag{8.32}$$

Sự liên hệ giữa nhân biến đổi và phổ của nó được xác định bằng biến đổi Fourier.

Nếu dùng biến đổi Henkel hạng không ta có thể viết

$S(\rho) = S_0(\rho)\, H(\rho)$

trong đó $S(\rho)$, $S_0(\rho)$ và $H(\rho)$ là phổ của các hàm F(r), f(r) và h(r) cho trước được tính trung bình trên vòng tròn bán kính r trên mặt phẳng.

** Các hàm số với phổ giới nội*

Hàm f(t) mà phổ của nó chỉ tồn tại đối với các tần số nhỏ hơn một tần số ω_c nào đó được gọi là hàm với phổ giới nội. Đối với hàm đó, phổ $S(\omega>\omega_c) = 0$ và vì vậy ta có thể biểu diễn nó dưới dạng sau:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{8.33}$$

Để xác định $S(\omega)$ trong khoảng $[-\omega_c, \omega_c]$ ta hãy khai triển $S(\omega)$ thành chuỗi Fourier

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i\pi}{\omega_c}k\omega} . \tag{8.34}$$

Trong biểu thức này khoảng $2\omega_c$ có ý nghĩa như chu kỳ cơ sở T, còn ω tương đương với thời gian mà theo đó việc khai triển thành chuỗi Fourier được tiến hành.

Tương ứng với công thức (8.6), các hệ số D_k trong khai triển (8.34) được xác định như sau:

$$D_k = \frac{1}{2\omega_c}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)e^{-i\frac{\pi}{\omega_c}k\omega}d\omega$$

(8.35)

Nếu sử dụng các biểu thức (8.34) và (8.35) ta có thể thu được biểu thức đối với f(t) :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{\frac{i\pi}{\omega_c}k\omega}\Big)e^{i\omega t}d\omega \tag{8.36}$$

Tính tích phân trước khi tính tổng, ta có:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \frac{\sin\omega_c[t + (\pi/\omega_c)k]}{t + (\pi/\omega_c)k} \tag{8.37}$$

Như đã nói ở trên, π/ω_c tương đương với thời gian t, từ đó suy ra rằng $(\pi/\omega_c)k = \Delta t$. Tiến hành các thay thế tương ứng vào trong biểu thức (8.35) ta thu được

$$D_k = f(t)\Delta t$$

Điều đó nói lên rằng đối với các hệ số D_k có hai cách biểu diễn tương đương: một trong miền tần số và một trong miền không gian:

$$D_k = \frac{\pi}{\omega_c} f\left(-\frac{\pi k}{\omega_c}\right) = \Delta t f(-k\Delta t) \tag{8.38}$$

Đặt giá trị này của D_k trong miền thời gian vào biểu thức (8.37) ta thu được giá trị cuối cùng

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\frac{\sin\omega_c(t - k\Delta t)}{\omega_c(t - k\Delta t)} \tag{8.39}$$

Như vậy hàm f(t) được biểu diễn dưới dạng chuỗi các hàm lượng giác mà các hệ số của chuỗi đó là các giá trị của hàm số qua khoảng $\Delta t = \pi/\omega_c = 1/2f_c$. Tần số f_c được gọi là tần số biên của phổ tần số. Biểu thức (8.39) chứng minh định lý Cachennhicôp: Một hàm với phổ giới hạn hoàn toàn được xác định bởi một số giới nội các giá trị của nó trong khoảng $[-\omega_c, \omega_c]$

Khi khai triển các hàm số thành chuỗi Fourier với phổ giới hạn thì số các thành phần của chuỗi trở nên giới nội và ta có thể viết

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} S_k e^{i\frac{2\pi}{T}kt}$$

Vì $\omega_c = (2\pi/T)n$ nên đối với số các hài n ta có

$$n = \omega_c\, T/2\pi \ = f_c T \tag{8.40}$$

Các trường địa vật lý thường được xem như là các hàm có phổ giới hạn ngay cả khi người ta quan sát các hàm đó một cách liên tục. Việc cắt bỏ các tần số cao trong trường hợp này được xác định bởi đặc trưng tần số của máy đo. Khi quan sát gián đoạn các trường, ta luôn có thể tiệm cận các trường này với các hàm có phổ giới hạn ($\omega_c = \pi/\Delta x$). Các hàm này tại các điểm gián đoạn nhận chính giá trị đo được. Cần phải làm sáng tỏ thêm ý nghĩa vật lý của định lý Kachennhicop: Về hình thức có thể viết hàm liên tục dưới dạng tích phân chập:

$$f(n\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta t)dt$$

trong đó $\delta(t-n\Delta t)$ là hàm delta bằng không với tất cả cc giá trị của t trừ tại các điểm nút của các đoạn nằm cách nhau một khoảng Δt. Giá trị $\delta(t)$ tại các điểm nút đó bằng vô cùng còn tích phân:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Từ định nghĩa về hàm $\delta(t)$ ta suy ra rằng: Hàm $\delta(t)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ bằng Δt và với tần số góc bằng $\omega_s = 2\pi/\Delta t$ (tần số $f_s = 1/\Delta t$). Trong miền tần số phổ của hàm số này có chu kỳ ω_s, tức là:

$$S_\delta(\omega) = S_\delta(\omega + \omega_s)$$

Trong thực tế Δt được chọn từ điều kiện $\Delta t \approx (0,1 - 0,2)T$, trong đó T là chu kỳ của hàm cần nghiên cứu.

8.1.3 Phổ của một số hàm và của các dị thường từ

Từ một số lượng lớn các hàm mà phổ của chúng có giá trị trong lý thuyết thông tin đã được mô tả trong các tài liệu đặc biệt (Khackêvic A.A. 1958), ta chỉ khảo sát phổ của một xung đơn vị (hàm delta Dirac), hàm chuông (đường cong Gauss) mà dạng của nó đặc trưng cho nhiều dị thường địa vật lý.

Hàm delta như đã nói trên, bằng không ở tại mọi nơi, trừ gốc tọa độ mà tại đó nó bằng vô cùng, còn diện tích xung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Khi có sự dịch chuyển τ, phổ của hàm này sẽ là :

$$S(\omega)=\int \delta(t-\tau)e^{-i\omega t}dt = e^{-i\omega t} \tag{8.41}$$

Môđun của phổ này bằng đơn vị, điều đó có nghĩa là mật độ phổ không thay đổi trong giải tần số vô cùng. Đối với xung ngắn dạng bất kỳ được miêu tả bằng hàm số f(t) với phổ bị giới hạn, tức là nhận giá trị bằng không ở ngoài khoảng $\left[-\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}\right]$ ta có thể viết

$$S(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)e^{-i\omega t}$$

Khi τ bé hàm số mũ gần bằng đơn vị, điều đó tương ứng với điều kiện ωτ/2 nhỏ hơn nhiều đơn vị ta có thể viết:

$$S(\omega)\approx\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(t)dt\approx q$$

trong đó q có ý nghĩa như là diện tích của xung.

Có thể chứng minh rằng xung này càng ngắn thì phổ càng rộng. Tính quy luật chung đó xuất phát từ các tính chất của phép biến đổi Fourier (Định lý về tỷ lệ xích).

Xung hình chuông về mặt giải tích được biểu diễn bằng hàm số $f(t)=e^{-\beta^2t^2}$.

Phổ của nó:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2t^2}e^{-i\omega t}dt = e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\beta t+i\frac{\omega}{2\beta})^2}dt$$

Sau khi tính tích phân này ta có

$$S(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}} \tag{8.42}$$

Từ đó ta thấy rằng phổ của hàm hình chuông có tính chất đặc biệt: Phổ của nó có dạng như chính hàm đó.

Để tìm phổ của các dị thường từ do các vật thể đơn giản gây ra cần phải áp dụng biến đổi Fourier đối với các hàm giải tích và tách phần thực ra khỏi phần ảo.

Ví dụ để cho sợi dây cực nằm ngang biểu thức từ của nó với vị trí gốc tọa độ bất kỳ có dạng :

$$Z = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{h}{(x-\xi)^2 + h^2}$$

Phổ phức tương ứng với định lý dịch chuyển sẽ là

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} e^{-i\omega\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} dx$$

Sử dụng công thức tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = \pi e^{-|\omega| h}$$

ta thu được

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2} e^{-\omega h} e^{-i\omega\xi} \tag{8.43}$$

Phần thực (môđun) của nó là:

$$|S(\omega)| = \frac{\mu_0 J}{2} e^{-\omega h}$$

Phần thực này là hàm số, giảm theo quy luật hàm số mũ khi tần số tăng.

Cần thấy rằng phổ này chính là phổ của hình trụ tròn nằm ngang, phổ dị thường Z do hình trụ tròn nằm ngang gây ra có thể được tính theo lý thuyết phổ của đạo hàm. Nếu vi phân (8.43) theo h

$$S'(\omega) = i\omega S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2} e^{-\omega h} e^{-i\omega\xi} \omega \tag{8.44}$$

Nếu lấy phần thực của S(ω) và thay J bằng M, ta có

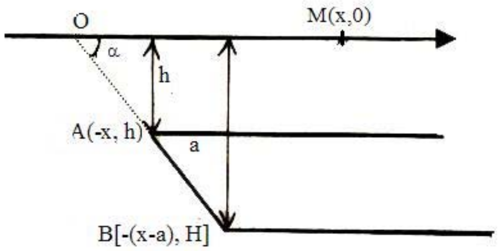
$$\left|S(\omega)\right| = \frac{\mu_0 M\omega}{2} e^{-\omega h}$$

Để tính phổ dị thường do bậc nghiêng bị từ hóa thẳng đứng gây ra ta chỉ cần dùng biểu thức (8.44) và tích phân biểu thức này theo diện tích của tiết diện thẳng đứng của bậc Q trong mặt phẳng xOz vì tác dụng của bậc tương đương với tác dụng của tổng một số vô cùng lớn các diện tích cơ bản dS mà mỗi một yếu tố cơ bản đó có thể được xem như hình trụ tròn nằm ngang. Phổ của bậc do vậy sẽ bằng tích phân các phổ của hình trụ tròn theo diện tích Q. Nếu chọn gốc tọa độ tại điểm O là giao điểm của mặt nghiêng của bậc với trục Ox và nếu dùng các ký hiệu được vẽ trên Hình 8.1 ta có thể viết:

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J\omega}{2} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-i\omega\xi} d\xi \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{-i\omega\zeta} d\zeta$$

Đầu tiên tính tích phân theo ξ rồi thay các cận, ta thu được

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2i} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} e^{\omega\zeta(1 - i\,\mathrm{ctg}\alpha)} d\zeta$$



Hình 8.1

Tính Z_a và H_a đối với bậc nghiêng

Sau khi tính tích phân theo ζ ta có:

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J(i - \mathrm{ctg}\alpha)}{\omega \mathrm{tg}^2\alpha}\left(e^{-\omega(\zeta_2 - i\zeta_2)} - e^{-\omega(\zeta_1 - \zeta_2)}\right)$$

Có thể viết lại biểu thức trên dưới dạng thuận tiện hơn bằng cách sử dụng các điểm góc trong tiết diện của bậc dưới dạng sau: (τ =ζ -iξ)

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J(i - \mathrm{ctg}\alpha)}{\omega \mathrm{tg}^2\alpha}\left(e^{-\omega\tau_2} - e^{-\omega\tau_1}\right) \qquad (8.45)$$

Sau khi biểu diễn $e^{i\omega\xi}$ dưới dạng các hàm số lượng giác và thực hiện các biến đổi cần thiết ta có thể thu được môđun của phổ

$$|S(\omega)| = \frac{\mu_0 J}{2\omega tg^2\alpha}[e^{-\omega h_2}(\cos\omega\xi_2 ctg\alpha \sin\omega\xi_2) -$$
$$- e^{-\omega h_1}(\cos\omega\xi_1 ctg\alpha + \sin\omega\xi_1)]$$

Khi $\alpha=90^0$ (bậc thẳng đứng):

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2\omega tg^2\alpha}\left(e^{-\omega\tau_2} - e^{-\omega\tau_1}\right)$$

$$|S(\omega)| = \frac{\mu_0 J}{2\omega tg^2\alpha}\left(e^{-\omega h_2} - e^{-\omega h_1}\right)\cos\omega\xi \qquad (8.46)$$

Nếu gốc tính toán được chọn nằm trên điểm đặc biệt gần nhất, còn điểm đặc biệt thứ hai có τ lớn, thì khi ω đủ lớn có thể bỏ qua ảnh hưởng của điểm đặc biệt thứ hai, vì $e^{-\omega\tau_2}$ trong biểu thức (8.46) sẽ gần với không, ta thu được

$$S(\omega) = \frac{\mu_0 J}{2\omega tg^2\alpha} e^{-\omega\tau_1}$$

và từ biểu thức (8.46) (khi ξ=0)

$$|S(\omega)| = \frac{\mu_0 j}{2\omega tg^2\alpha} e^{-\omega h_1} \qquad (8.47)$$

Nếu sử dụng thế trọng lực phức của thanh vật chất nằm ngang

$$V(\tau) = 2f\sigma \ln\tau$$

Để xác định đạo hàm của thế khi cho trước tiết diện ngang S cần phải tích phân biểu thức trên theo mặt S. Ví dụ trong trường hợp bậc nằm ngang với $V_{xxz} = \frac{\partial}{\partial}\left(V_{xz} - iV_{zz}\right)$, thành phần này chính là gradient nằm ngang của cường độ trường phức (V_{zz} = -V_{xx}), ta có:

$$V_{xxz} = \frac{2f\sigma}{ictg\varphi - 1}\left(\frac{1}{\tau - \tau_1} - \frac{1}{\tau - \tau_2}\right) \tag{8.48}$$

trong đó τ_1 và τ_2 là các tọa độ phức của các góc của bậc, φ là góc cắm của mặt bên.

Với lăng trụ nằm ngang có tiết diện ngang là một đa giác và trường của nó có thể được xem như là chồng chất các trường của các bậc nằm ngang, đạo hàm trên có dạng

$$V_{xxz} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_{xz} - iV_{zz}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{\tau - \tau_k} \tag{8.49}$$

trong đó A_k là các hằng số phức nào đó, tương tự như hệ số trong (8.48), τ_k là tọa độ phức của các đỉnh của tiết diện ngang của lăng trụ ngang.

Phổ của hàm (8.49) cho trước trên tuyến nằm ngang (trên trục Ox) sẽ bằng:

$$S_2(\omega) = \sum_{k=1}^{n} A_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \tau_k} e^{i\omega x} dx$$

Tích phân trong biểu thức này có thể tính được nhờ lý thuyết thặng dư:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x - \tau_k} dx = 2\pi i e^{i\omega\tau_k}$$

từ đó ta đi đến dạng cuối cùng:

$$S_2(\omega) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega\tau_k} \tag{8.50}$$

Phổ của cường độ trường phức theo lý thuyết về đạo hàm có dạng:

$$S_1(\omega) = -\frac{2\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{n} A_k e^{i\omega\tau_k} \tag{8.51}$$

Nhờ phương trình Poisson (với $f\sigma = 1$) ta có thể dễ dàng xác định được biểu thức của cường độ từ phức:

$$H - iZ = -\frac{\mu_0 Ji}{4\pi}\left(V_{xz} - iV_{zz}\right)e^{i\gamma} \tag{8.52}$$

trong đó γ là góc giữa độ từ hóa J và trục Ox

Phổ của nó tương ứng với biểu thức (8.51) bằng:

$$S_1(\omega) = -\frac{2\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{n} B_k e^{i\omega\tau_k} \tag{8.53}$$

trong đó

$$B_k = A_k(\ -J\ e^{i\gamma}\ )$$

Phổ của hàm phức do ΔT_a gây ra vì có đạo hàm cùng hạng có cấu trúc tương tự. Các hệ số C_k trong trường hợp đó chỉ khác với các hệ số B_k một hệ số nhân mà thôi.

Khi có phổ của hàm cường độ trường tử ta có thể dễ dàng tính được phổ của gradient của trường đó.

$$S_3 = \frac{\mu_0 i}{2}\sum_{k=1}^{n} B_k e^{i\omega\tau_k} \tag{8.54}$$

Đối với điểm đặc biệt gần gốc tọa độ được chọn khi tính phổ, độ sau $h = h_1$ là giá trị bé nhất trong số các độ sâu h_k được xác định qua các biểu thức thu được ở trên. Vì vậy khi ω lớn có thể bỏ qua các giá trị của các số hạng với $h_k > h_1$ và ta thu được đẳng thức gần đúng để xác định tọa độ phức $\tau_1 = x_1 - i\ h_1$

$$S_3(\omega) \approx \frac{\mu_0 i}{2} B_1 e^{i\omega x} e^{-\omega h_1}$$

Từ đó

$$|S_3(\omega)| \approx \frac{\mu_0 i}{2}|B_1| e^{-\omega h_1} \tag{8.55}$$

Nếu chọn hai tần số cố định ω_2 và ω_1 và lấy loga các biểu thức (8.43), (8.44) hoặc (8.55) ta thu được các công thức tính toán để xác định độ sâu của sợi dây chứa các cực của hình trụ tròn nằm ngang hoặc điểm đặc biệt gần nhất của vật thể tạo nên dị thường hai chiều.

$$|S_3(\omega)| \approx \frac{\mu_0 i}{2}|B_1| e^{-\omega h_1} \tag{8.56}$$

Các phương pháp phân tích dựa trên việc biểu diễn phổ sẽ được khảo sát trong các phần sau .

8.1.4 Biểu diễn phổ các quá trình ngẫu nhiên

Trường từ không những được xem như hàm xác định thuộc lớp các hàm giải tích (hàm thế) mà còn được xem như là một thể hiện của hàm ngẫu nhiên gây ra do sự phân bố ngẫu nhiên của độ từ hóa (nguồn trường) trong vỏ quả đất. Với cách tiếp cận thống kê đó, sự liên hệ giữa các giá trị riêng biệt của trường với các tọa độ x,y được đặc trưng bởi một xác suất nào đó p(x, y), còn chính quá trình ngẫu nhiên được mô tả qua các mômen tương quan. Đôi khi người ta còn phải thống nhất các cách tiếp cận thông kê và cách xác định, tức là biểu diễn trường địa vật lý dưới dạng hai thành phần: thành phần xác định do một mô hình vật lý nào đó về sự phân bố các nguồn trường và thành phần ngẫu nhiên do các sai số trong khi quan sát cũng như do các nhiễu khác mà trong số đó có các nhiễu có nguồn gốc địa chất gây ra.

Ta hãy khảo sát chi tiết hơn các thông số đặc trưng cho hàm ngẫu nhiên của trường địa vật lý. Các thông số đó là các mômen tương quan bậc nhất : Độ kỳ vọng toán học của hàm ngẫu nhiên một chiều $\xi(x)$:

$$\xi(x) = M(x) = \int xp(x)dx \qquad +$$

Mômen tương quan bậc hai : hàm số tự tương quan

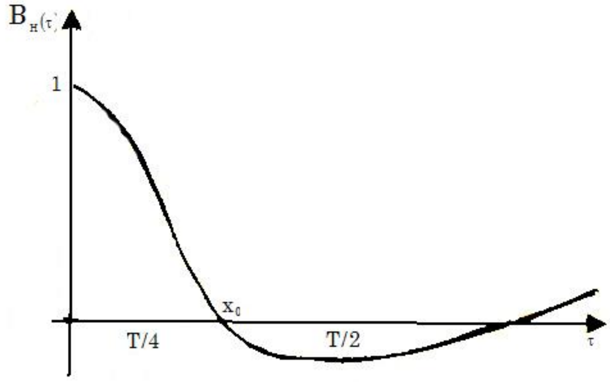
$$B(x, x+\tau) = M[\xi(x)\xi(x+\tau)] = \int\int x_1 x_2 p(x_1, x_2)dx_1 dx_2$$

Hàm ngẫu nhiên được gọi là chuẩn dừng, nếu như các giá trị $M(\xi)$ và $B(\xi)$ không phụ thuộc vào việc lựa chọn điểm gốc để tính toán trên trục x. Với các hàm chuẩn dừng mômen tương quan thứ nhất là giá trị trung bình của hàm số $\overline{\xi(x)}$, còn mômen tương quan thứ hai là các giá trị trung bình của $\overline{\xi(x)\xi(x+\tau)}$. Hàm $B(x,x+\tau)$ trong trường hợp đó trở thành hàm của một biến τ (dịch chuyển theo trục x). Hàm ngẫu nhiên chuẩn dừng được gọi là êgodic nếu như giá trị trung bình của nó theo tập hợp $\overline{\xi(x)}$ và $\overline{\xi(x)\xi(x+\tau)}$ với xác suất cao bằng giá trị trung bình theo x. Như thực nghiệm đã chứng minh các trường địa vật lý thực khi độ dài của tuyến khá lớn có tính chuẩn dừng và êgôdic. Vì vậy đối với các trường đó các giá trị của các mômen tương quan có thể được viết dưới dạng sau:

$$M(\xi) = \lim_{L->\infty} \frac{1}{L}\int_0^L \xi(x)dx$$

$$B(\tau) = \overline{\xi(x)\xi(x+\tau)} = \lim_{L->\infty} \int_0^L \xi(x)\xi(x+\tau)d\tau$$

hoặc nếu như các thể hiện $\xi(x)$ được cho dưới dạng gián đoạn thì:



Hình 8.2

Đặc tính có chu kỳ ẩn của hàm tự tương quan.

$$M(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi(k\Delta x)$$

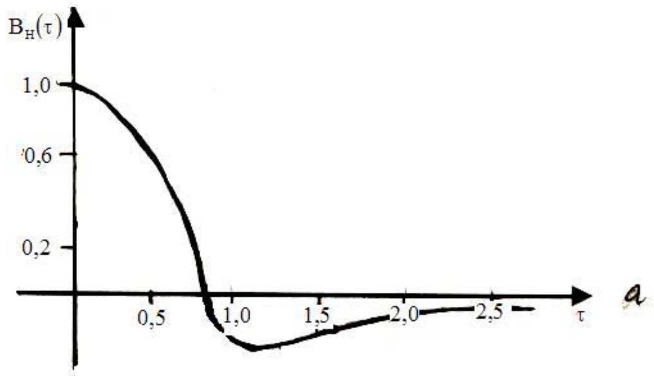
$$B(\tau) = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\left[\xi(x_i) - \overline{\xi(x)}\right]\left[\xi(x_i + m) - \overline{\xi(x)}\right] \qquad (8.57)$$

Trong đó Δx khoảng cách giữa các điểm cách đều nhau, x_i là điểm tại đó cho trước giá trị của hàm, n là tổng số điểm, m = ± kΔx chính là dịch chuyển τ.

Hàm tương quan đối xứng đối với τ=0, tức là hàm số chẵn. Nếu x_0 là hoành độ của điểm mà tại đó b(τ) bằng không thì hàm này có chu kỳ ẩn là T= $4x_0$. Nếu trường từ có cấu trúc bất đẳng hướng thì các giá trị của các mômen tương quan được xác định bằng các biểu thức (8.57) sẽ khác nhau tùy thuộc vào phương được lựa chọn của x.

Khi τ = 0:

$$B(0) = M\left[\xi^2(x)\right] = \overline{\xi^2(x)} = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L \xi^2(x)dx \qquad (8.58)$$



Hình 8.3

Hàm tự tương quan chuẩn hoá đối với trường từ của quả cầu: a = τz/2; z là độ sâu đến tâm hình cầu.

trong đó B(0) chính là giá trị trung bình bình phương biên độ của trường từ. Hàm tự tương quan được chuẩn hóa $B_H(\tau)$ hoặc hệ số tương quan R được xác định như là tỷ số:

$$R = B_H(\tau) = \frac{B(\tau)}{B(0)} \tag{8.59}$$

Phương sai của quá trình ngẫu nhiên được xác định qua các mômen hạng một và hạng hai cũng như phương sai của các đại lương ngẫu nhiên:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \overline{\xi(x)} - \overline{[\xi(x)]^2} = B(0) - \xi_0^2 \tag{8.60}$$

và đối với quá trình ngẫu nhiên trị số của phương sai phải là đại lượng không đổi.

Theo ý nghĩa vật lý B(0) là công suất toàn phần của quá trình, còn ξ_0^2 và D(ξ) là công suất của các thành phần không đổi và biến đổi. Hàm tự tương quan đặc trưng cho tính chặt chẽ về sự liên hệ thống kê giữa các giá trị của trường địa vật lý theo phương x. Các kích thước của các dị thường riêng biệt càng lớn thì hàm tự tương quan giảm càng nhanh. Khoảng cách mà từ đó sự liên hệ thống kê có thể được xem như không đáng kể được gọi là bán kính tự tương quan:

$$r(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau)d\tau}{B(0)} \tag{8.61}$$

Trong thực tế người ta lấy khoảng cách τ mà tại đó $B_H(\tau)$= 0.3 làm bán kính tự tương quan. Trong trường hợp nếu $B_H(\tau)$ thay đổi dấu, khoảng cách này được tính theo trục hoành dịch xuống dưới đến độ sâu cực tiểu của $B_H(\tau)$. Khi không có sự liên hệ thống kê giữa các giá trị của trường dị thường bán kính tự tương quan bằng không. Trong nhiều trường hợp có thể giả thiết có sự vắng mặt về mối liên hệ tương quan giữa các sai số của các phép đo địa vật lý (bán kính tự tương quan nằm trong giá trị từ Δx đến 2Δx).

Với các hàm tự tương quan ta có thể áp dụng phép biến đổi Fua riê và theo định lý Viner và Khinchin ta có thể thu được phổ thống kê của quá trình ngẫu nhiên

$$B(\tau)=\frac{1}{2}\int G(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau$$
$$G(\tau)=\frac{2}{\pi}\int B(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{8.62}$$

Như đã nhận xét ở trên, vì hàm B(τ) chẵn nên biểu thức (8.62) trở thành biến đổi cosin Fourier:

$$B(\tau)=\int_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau d\omega$$

$$G(\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{8.63}$$

Phổ của hàm ngẫu nhiên dừng chỉ rõ sự phân bố của phương sai theo các tần số khác nhau. Tung độ G(ω) tương ứng với tần số ω là mật độ trung bình của phương sai trong khoảng Δω. Thay cho mật độ phổ G(ω) ta có thể dùng mật độ phổ đã được chuẩn hóa.

$$G_H(\omega)=\frac{G(\omega)}{D_x} \tag{8.64}$$

Trong đó D_x là phương sai của hàm ngẫu nhiên ξ(x).

Toàn bộ diện tích bị giới hạn bởi đường cong mật độ phổ chuẩn hóa với trục bằng đơn vị.

Nhờ các biến đổi Henkel (8.18) và (8.19), sử dụng biến đổi Viner- Khinchin ta có thể thu được các biểu thức của hàm tự tương quan và phổ thống kê của trường dị thường từ phụ thuộc vào hai tọa độ:

$$B(\tau)=\int_0^\infty G(\rho)J_0(\rho\tau)\rho d\rho$$

$$G(\rho)=\int_0^\infty B(\tau)J_0(\rho\tau)\tau d\tau \tag{8.65}$$

Để làm ví dụ ta đưa ra biểu thức giải tích của hàm tự tương quan của hàm dị thường từ do sợi dây hai cực và sợi dây cực gây ra.

$$B(\tau)_P = 16h^5 \frac{8h^2 - 3\tau^2}{\left(\tau^2 + 4h^2\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$B(\tau)_D = 16h^4 \frac{4h^2 - 3\tau^2}{\left(\tau^2 + 4h^2\right)^3}.$$

Trường hợp hình cầu, ta có đường cong biểu diễn trên Hình 8.3.

Ta thấy rằng các hàm tự tương quan của các dị thường trọng lực và từ do các vật thể có tiết diện ngang giới nội gây ra đi qua giá trị không để rồi đi vào miền các giá trị âm.

Khảo sát hàm tự tương quan của tích phân chập:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, f(x - \lambda)\, d\lambda \tag{8.66}$$

hàm này khi dịch chuyển một đoạn τ có dạng:

$$F(x + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) f(x + \tau - \eta) d\eta \tag{8.67}$$

Hàm tự tương quan $B_F(\tau)$, rõ ràng sẽ bằng:

$$B_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) F(x + \tau) dx$$

Nhờ các biểu thức (8.66) và (8.68) , đồng thời thay đổi thứ tự tính tích phân ta có thể thu được biểu thức sau:

$$B_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \lambda) f(x + \tau - \eta) dx\right] d\eta \tag{8.68}$$

Dễ dàng khẳng định rằng biểu thức trong dấu ngoặc vuông là hàm số tự tương quan $B_f(\tau+\lambda-\eta)$ nếu thêm λ vào cả hai biến số của hàm f .Vì vậy:

$$B_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta) B_f(\tau + \lambda - \eta) d\eta.$$

Nếu đặt $\nu=\eta-\lambda$ và một lần nữa thay đổi thứ tự tính tích phân ta thu được:

$$B_F(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} B_f(\tau-\nu)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)h(\lambda+\nu)d\lambda\right]d\nu$$

Nếu ta nhận thấy rằng trong dấu ngoặc vuông là hàm tự tương quan $B_h(\nu)$, thì ta có thể viết lại biểu thức cuối cùng cho $B_F(\tau)$:

$$B_F(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} B_h(\nu)B_f(\tau-\nu)d\nu \qquad (8.69)$$

Như vậy, dạng liên hệ giữa các hàm số F(x), f(x) và h(x) tương tự với dạng liên hệ giữa các hàm số tự tương quan. Nhờ có điều đó ta có thể xác định được hàm tự tương quan của hàm đã được biến đổi F(x) của trường địa vật lý qua hàm tự tương quan của hàm xuất phát f(x) và nhân biến đổi h(x) mà không cần dùng đến các giá trị của trường đã được biến đổi.

Tương ứng với công thức (8.63) phổ thống kê của hàm $B_F(\tau)$ có dạng:

$$G_F(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \qquad (8.70)$$

Đối với $B_F(\tau)$ nếu sử dụng biểu thức thu được ở trên và nhân thêm nó cho $e^{-i\omega(\lambda-\eta)}e^{i\omega(\lambda-\eta)}$, bằng đơn vị, và gộp các số hạng lại ta có:

$$G_F(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-i\omega\eta}d\eta\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)e^{i\omega\lambda}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} B_F(\tau+\lambda-\eta)e^{-i\omega(\tau+\lambda-\eta)}d\tau$$

Tích phân đầu tiên trong biểu thức này chính là phổ thống kê $G_h(\omega)$, còn tích phân thứ hai là phổ thống kê liên hợp với nó $\overline{G_h(\omega)}$, còn tích phân thứ ba là phổ năng lượng của trường xuất phát f(x). Do đó, các phổ của các hàm tự tương quan liên hệ với nhau qua biểu thức:

$$G_{F\pi}(\omega)=\frac{1}{\pi}G_h(\omega)\overline{G_H(\omega)}G_F(\omega)=\frac{1}{\pi}|H(\omega)|^2G_f(\omega) \qquad (8.71)$$

Bây giờ ta chuyển sang khảo sát các phép biến đổi trường cụ thể.

8.2 Phép lọc

Sự biến đổi này dựa trên việc xây dựng và sử dụng các phép lọc bằng số (hàm trọng số) với đặc trưng tần số cho trước. Trong trường hợp trường ba chiều cho trước trên một mặt phẳng khi mà tần số ω được thay bằng tần số ρ ta có thể thu được hàm trọng số h(r) qua phép biến đổi Hankel

$$h(r) = \int_0^\infty H(\rho) J_0(\rho r) \rho d\rho$$

Đặc trưng tần số của phép lọc lý tưởng là hàm đơn vị:

$$\begin{aligned} H(\rho) &= 1 \text{ khi } |\rho| \le \rho_c \\ &= 0 \text{ khi } |\rho| > \rho_c \end{aligned}$$

trong đó ρ_c là tần số biên (tần số cắt).

Hàm trọng số của phép lọc này là:

$$h(r) = \int_0^\infty J_0(\rho r) \rho d\rho = \frac{\rho_c J_1(\rho r)}{2\pi r}$$

Như đã thấy từ lý thuyết, phép lọc lý tưởng không có ứng dụng trong thực tế, vì vậy người ta đề nghị xây dựng phép lọc h(r) dưới dạng tích của hai thừa số nhân.

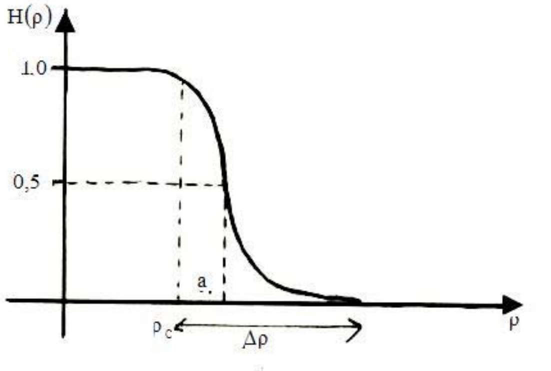
$h(r) = \omega(r)\, g(r)$

với đặc trưng phổ H(ρ) được vẽ trên Hình 8.4.

Khác với phép lọc lý tưởng, phép lọc này có đặc trưng tần số thay đổi từ 1 đến 0 không phải lập tức mà trên một khoảng Δρ nào đó. Đoạn này là một trong các tham số cần phải được lựa chọn trong phép lọc.

Thừa số nhân g(r) có phổ của phép lọc lý tưởng với tần số giới hạn $a = \rho_e + \Delta\rho/2$ và vì vậy bằng:

$$g(r) = \frac{a J_1(ar)}{2\pi r}$$



Hình 8.4

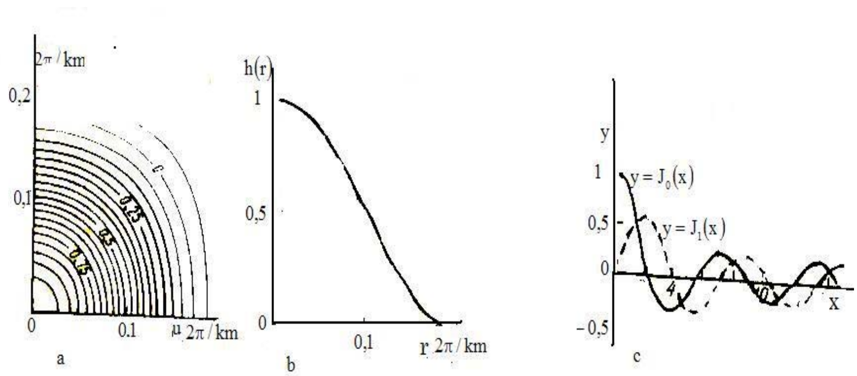
Đặc trưng phổ của phép lọc tần số thấp Leivin-Divein

Người ta dùng hàm Bessel hạng không để làm đặc trưng tần số cho thừa số nhân ω(r)

$$W(\rho) = \beta J_0\left(\frac{\alpha\rho}{\Delta\rho}\right) \qquad \text{khi } |\rho| \leq \Delta\rho/2;$$

trong đó α và β là các hằng số mà ta cần phải xác định. Hàm J_0 bằng không đầu tiên khi mà biến số của nó bằng 2,4048, tương ứng với các điều kiện nêu ra khi biến số đó bằng Δρ/2. Từ đó hằng α =4,8096. Hằng β được chọn sao cho diện tích A giới hạn bởi W(ρ) và trong phạm vi vòng tròn bán kính Δρ/2 trong mặt phẳng tần số (u,v) bằng 1 :

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\Delta\rho}{2}} \beta J_0\left(\frac{\alpha\rho}{\Delta\rho}\right)\rho d\rho d\theta = \frac{\pi\beta^2\Delta\rho^2}{\alpha} J_1\left(\frac{\alpha\rho}{\Delta\rho}\right)$$



Hình 8.5

Hàm trọng số Leivin -Devein

a- Trên mặt phẳng b- Dọc theo tuyến xuyên tâm. c. Các hàm Besel hạng không và hạng một

trong đó θ xác định vị trí của ρ.

Chú ý rằng αρ/Δρ =α/2, ta có:

$$\beta = \frac{\alpha}{\pi\Delta\rho^2 J_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Đặt giá trị của β vào trong biểu thức của W(ρ) và nếu dùng biến đổi Hăngken ngược để chuyển từ phổ sang hàm trọng số ω(r) ta có :

$$\omega(r) + \frac{J_0\left(\frac{\Delta\rho}{2}r\right)}{1-\left(\frac{\Delta\rho}{\alpha}r\right)^2}$$

Theo các giá trị của g(r) và ω(r) ta thu được hàm trọng số của phép lọc Leivin- Divein dưới dạng sau:

$$h(r) = \frac{aJ_1(ar)}{2\pi r}\frac{J_0\left(\frac{\Delta\rho}{2}r\right)}{1-\left(\frac{\Delta\rho}{\alpha}r\right)^2} \tag{8.72}$$

8.3 Phép trung bình hoá

Với quan điểm toán học một tín hiệu chuyền qua một bộ lọc được biểu diễn bằng tích phân chập:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{8.73}$$

trong đó f(t) hoặc $f(t-\tau)$ là các tín hiệu xuất phát cần được lọc, F(t) là tín hiệu trên lối ra của bộ lọc, còn h(τ) hoặc h(t-τ) được gọi là hàm trọng số của phép lọc. Trong miền tần số chúng tương ứng với các hàm phổ mà ta đã quen biết $S_F(\omega)$, $S_f(\omega)$ và H(ω). Sự liên hệ giữa các hàm phổ này được xác định bởi định lý Barel. Cho vào công thức (8.73) các hàm u(x) và h(x) ta có

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)h(x-\xi)d\xi \tag{8.74}$$

Loại lọc này thường gặp trong việc tiếp tục giải tích trường thế lên nửa không gian trên theo công thức Poisson:

$$U(x,z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x_0,z_0)(z-z_0)}{(x-x_0)^2+(z-z_0)}dx_0$$

trong đó hàm trọng số h(x) có dạng:

$$h(x) = \frac{z-z_0}{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2} \tag{8.75}.$$

Khi tính đạo hàm thẳng đứng ta dùng nhân biến đổi dạng:

$$h(x) = \frac{1}{(x-\xi)^2}$$

Thuộc dạng biến đổi này còn phải kể đến phép trung bình hoá, phép biến đổi này trong trường hợp trường hợp bài toán hai chiều có dạng:

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u(x-\xi)d\xi$$

Nếu lấy hàm nhân biến đổi là hàm bằng không tại miền ngoài của khoảng [-l, l] và bằng đơn vị trong khoảng đó thì:

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u(x)\delta(x-\xi)d\xi \qquad 8.76)$$

Người ta thường tiến hành phân chia trường địa từ ra thành các thành phần lục địa, khu vực và địa phương theo các đặc trưng sóng của chúng. Mỗi một thành phần đó được đặc trưng bởi các giá trị bán kính tự tương quan liên hệ với phổ của trường dị thường của từng loại trường. Trong thăm dò từ, trường địa từ có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của ba thành phần: khu vực, địa phương và nhiễu:

$$u(x) = u_{kv}(x) + u_{df}(x) + u_n(x)$$

Hàm tự tương quan của các nhiễu $B_n(\tau)$ có bán kính tự tương quan bé và theo quan điểm của lý thuyết thông tin là các xung . Phổ của chúng do đó có độ rộng lớn giàu tần số cao.

Phổ của dị thường khu vực có độ rộng bé nhất.

Khi biến đổi trường xuất phát sẽ xảy ra việc thay đổi thành phần của phổ do làm giảm thành phần này hay thành phần khác. Nếu gọi S(ω) là phổ của trường đã được biến đổi còn $S_{kv}(\omega)$, $S_{df}(\omega)$ và $S_n(\omega)$ tương ứng là phổ của các thành phần khu vực ,địa phương và nhiễu của trường xuất phát, H(ω) là đặc trưng phổ của nhân biến đổi (lọc) thì ta có thể viết:

$$S(\omega) = S_{kv}(\omega)H(\omega) + S_{df}(\omega)H(\omega) + S_n(\omega)\,H(\omega)$$

Tương ứng với biểu thức (8.41) hàm trọng số của phép lọc là xung vuông góc có độ rộng 2l. Tính phổ H(ω) và lấy phân thực ta thu được :

$$H(\omega) = \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi = \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega\xi}d\xi = \frac{\sin\omega l}{\omega l}$$

tại gốc toạ độ (ω =0) hàm H(ω) =1. Giá trị không của H(ω) được xác định từ điều kiện ωl =kπ.

Trong trường hợp bài toán ba chiều khi phép trung bình hoá được tiến hành theo diện tích hình tròn bán kính r_0:

$$\delta(r) = \begin{cases} 1 & \text{khi } \; r \le r_0 \\ 0 & \text{khi } \; r \ge r_0 \end{cases}$$

Nếu sử dụng biến đổi Henkel ta có:

$$H(\rho)=\frac{1}{r_0^2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(r)J_0(\rho r)dr=\frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0}J_0(\rho r)dr$$

Từ đó sau khi tính tích phân:

$$H(\rho)=\frac{2J_1(\rho r)}{\rho r_0}$$

trong đó $J_1(\rho r_0)$ là hàm Bessel hạng một. Giới hạn của $H(\rho)$ khi r_0 ->0 cũng như giới hạn của $H(\omega)$ khi ω -> 0, bằng đơn vị. Dạng của hàm số $J_0(\rho r)$ và $J_1(\rho r)$ được vẽ trên Hình 8.5 (c).

Về mặt toán học phép trung bình hoá là phép biến đổi khi mà hàm trọng số có giá trị không đổi với tất các giá trị của n.

Rõ ràng là đối với hàm trọng số ta có thể viết:

$$\sum h_n = 1$$

vì $h_n = \frac{1}{N}$ (N là số điểm trong giới hạn của palet).

Phương pháp trung bình hoá có bản chất như sau: Trường dị thường quan sát được có thể được xem như là tổng của hai thành phần: phần khu vực U_{kv} và phần địa phương U_{df}.

Trường địa vật lý quan sát được (trường từ, trường trọng lực) được lấy trung bình trong phạm vi vòng tròn bán kính R. Có thể biểu diễn giá trị trung bình này dưới dạng tích phân

$$\overline{U(0,0,0)}=\frac{1}{S}\iint_S UdS=\frac{1}{S}\iint_S U_{kv}dS+\iint_S U_{df}dS$$

Tích phân thứ hai khi R tăng ($S = \pi R^2$) sẽ tiến tới không và như vậy giá trị trung bình trường tại (0,0,0) bằng giá trị trung bình trường tại điểm đó:

$$\overline{U(0,0,0)}=U_{kv}(0,0,0)$$

Như vậy phép tính trung bình nhấn mạnh các dị thường thay đổi từ từ, gạt bỏ hoặc giảm thiểu nhiều các dị thường có gradient lớn, tức là các dị thường liên hệ với các đối tượng gần mặt đất.

Các dị thường địa phương được tính toán bằng cách lấy giá trị trường quan sát được trừ đi giá trị dị thường trung bình (gần đúng bằng giá trị dị thường khu vực)

$$U(x,y)=U(x,y)-\overline{U(x,y)}\,.$$

Để có được phổ tần số của trường xuất phát, thường người ta thay cho các phép biến đổi Fourier thông thường bằng cách sử dụng phân tích phổ không gian. Thuật toán này được sử dụng rộng rãi trong thăm dò địa chấn. Bản chất của phép biến đổi này trong trường hợp trường từ bao gồm việc lọc giải trên tuyến bằng một bộ các phép lọc giải hẹp với đặc trưng phổ của phép lọc thứ i là:

$$H_i(\omega)=e^{-\alpha(\frac{\omega-\omega_i}{i})^2}$$

trong đó α là thông số điều chỉnh, ω_i là tần số trung tâm của bộ lọc thứ i

Nếu gọi phổ của trường xuất phát là $S_0(\omega)$, còn phổ của thành phần lọc trường là $F(\omega_i, x)$, phổ này sẽ là hàm của toạ độ x và giá trị ω_i , thì ta có thể viết được:

$$F(\omega_i, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega)H_i(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

Vì $S_0(\omega)H_i(\omega)$ chính là đặc trưng phổ của $F(\omega_i, x)$

8.4 Tính chuyển trường lên nửa không gian trên

Phép biến đổi này có ý nghĩa vật lý rất rõ ràng, vì tính trường lên trên có nghĩa là đi xa nguồn gây nên dị thường . Cơ sở của phép biến đổi là công thức Poisson. Công thức này trong hệ thống toạ độ trụ có dạng:

$$U(0,0,-z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} U(\varphi,\rho,o)\frac{z}{\left(z^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\rho d\rho \qquad (8.77)$$

Vì khi tính chuyển lên một độ cao nào đấy, biên độ của thành phần cố định không thay đổi, tổng các giá trị của hàm trọng số h_n của phép biến đổi này phải bằng đơn vị. Thật vậy:

$$F(x) = \sum_{i=-n}^{n} h_i f(x + i\Delta x)$$

từ đó, khi $F(x) = f(x+n\Delta x)$ =const ta suy ra:

$$\sum_{i=-n}^{n} h_i = 1$$

Thông số biến đổi là độ cao tính chuyển z và khoảng cách Δx. Các cận tích phân vô cùng theo r được xác định trước sao cho nó lớn hơn nhiều chuỗi các giá trị h_n.

Nhiều nhà nghiên cứu đã chứng minh rằng (Strakhop, Lapin): Các giá trị tối ưu của r va Δx phụ thuộc vào độ sâu H của điểm đặc biệt gần nhất của hàm U và độ cao tính chuyển z. Thực tế bán kính r phải vào cỡ 10z khi $\Delta x \cong z$.

Trong hệ thống toạ độ vuông góc, khi trục z hướng xuống dưới, tích phân Poisson có dạng:

$$U(x,y,-z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi,\eta,0)d\xi d\eta}{\left[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad (8.78)$$

Tích phân biểu thức (8.78) theo η, ta thu được tích phân Poisson trong trường hợp bài toán hai chiều:

$$U(x,-z) = \frac{z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi,0)d\xi}{(\xi-x)^2+z^2}$$

Đối với điểm có toạ độ (0, -h) trên độ cao h:

$$U(x,-h) = \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi,0)d\xi}{(\xi - x)^2 + h^2} \tag{8.79}$$

Để tính tích phân (8.79) ta đưa vào biến số mới:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\xi}{h};$$
$$d\varphi = \frac{h}{\xi^2 + h^2}d\xi \quad ;$$

lúc đó biểu thức (8.79) có dạng

$$U(0,-h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U(\varphi,0)d\varphi \tag{8.80}$$

tức là giá trị U(0, -h) được xác định như là giá trị trung bình tích phân U(φ, 0) theo góc nhìn được φ.

Theo công thức (8.80) người ta dựng các palet để tính $U(0,-h)$. Từ điểm $(0,-h)$, điểm mà tại đó cần phải xác đinh giá trị cần tiếp tục giải tích, ta vẽ hệ các tia cách nhau cùng một góc Δφ và bằng π/n, trong đó n là một số nguyên đủ lớn:

$$U(0,-h) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{U}_i \tag{8.81}$$

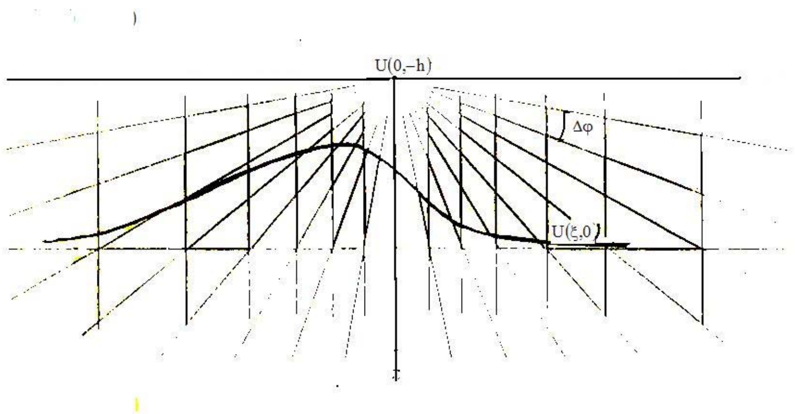
$\overline{U_i}$ là giá trị trung bình của hàm số trên khoảng thứ i mà từ điểm tính (0,-h) ta nhìn khoảng đó dưới góc Δφ. Khoảng này giới hạn bởi các giao điểm của các tia với trục x.

Palet được xây dựng theo cách đó có thể được sử dụng để tính chuyển trường lên một mức bất kỳ mà không cần phải vẽ lại đường cong U(ξ, 0),Hình 8.6.

Độ cao tính chuyển được xác định bằng khoảng cách từ điểm (0,-h) đến trục x theo đơn vị tỷ lệ xích được dùng để đo khoảng cách trên tuyến. Việc tính toán bao gồm tính giá trị trung bình trường trong mỗi khoảng và giá trị tính chuyển là giá trị trung bình trong n khoảng.

Một palet được sử dụng khá thông dụng trong thực tế do Strakhôp đề ra. Có thể viết tích phân (8.79) dưới dạng:

$$U(0,-h)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi_k,0)K(\xi_k,0)d\xi_k \tag{8.28}$$



Hình 8.6

Palet tính chuyển trường lên trên

trong đó $\xi_k = \frac{\xi}{h}$; $(\xi_k, 0) = \frac{1}{1+\xi_k^{\ 2}}$

Biểu diễn tích phân (8.82) dưới dạng tổng các tích phân có cận giới nội, tiếp đến với mỗi một tích phân người ta sử dụng công thức cầu phương Gauss để tính tích phân. Lúc đó công thức tính toán có dạng

$$U(0,-h) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=-n}^{n} A_i K_i(\xi_{hi}) U(\xi_{hi}) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=-n}^{n} C_i(\xi_{hi}, 0) \qquad (8.83)$$

trong đó

A_i là các hệ số trong các công thức cầu phương của Gauss

ξ_i là các điểm nút được sử dụng trong các công thức đó

Bảng 8.1 cho ta các hệ số của palet Strakhôp để tính chuyển trường lên trên.

Palet Strakhôp là hệ thống các đường thẳng đi qua các điểm có hoành độ Gauss và có thước đo đều với tỷ lệ xích nhân lên bằng $m_i = 1/C_i$. Nếu thừa nhận đơn vị đo tung độ của đồ thị là 1mm thì trên thước thứ i đơn vị đo là đoạn bằng m_i mm.

Đọc giá trị trường trên đường cong tương ứng với từng thức đo, lấy tổng các giá trị này. Tổng đó chia cho π chính là giá trị trường đã chuyển lên độ cao - h.

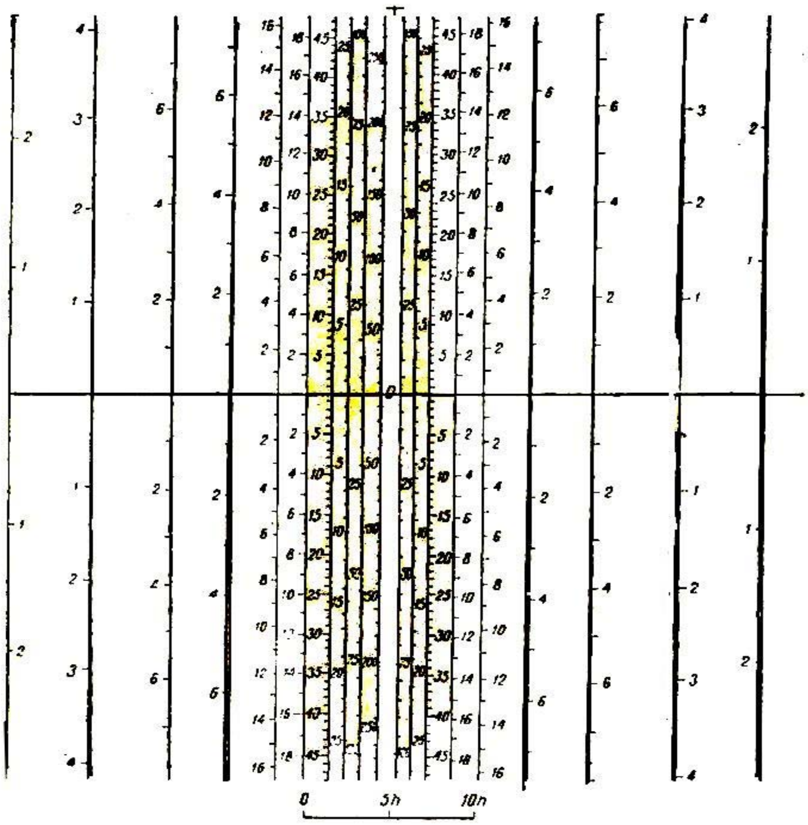
Trong trường hợp bài toán ba chiều, tích phân Poisson trong hệ thống toạ độ trụ thẳng đứng có dạng:

$$U(0,0,-h) = \frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{U(r,\varphi,0)}{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} r dr \qquad (8.84)$$

Bảng 8.1 Các hệ số trong palet Strakhôp

i	ξ_{hi}	C_i	$m_i = 1/C_i$

0	0	1,136	0,88
1	1,088	0,424	3,36
2	1,812	0,110	9,09
3	2,364	0,189	5,29
4	4,366	0,085	13,30
5	6,058	0,065	15,40
6	8,943	0,030	33,30
8	12,50	0,032	31,40



Hình 8.7

Palet Strakhôp để tính chuyển trường lên trên

Cách sử dụng palet này như sau: Vẽ đường cong đo được theo tỷ lệ xích ngang tương ứng (h=1cm). Trên mỗi một thước, đọc giá trị trường trên đường cong, lấy tổng các giá trị này. Tổng đó chia cho π chính là giá trị trường đã chuyển lên độ cao h.

Trong trường hợp bài toán ba chiều, tích phân Poisson trong hệ thống toạ độ trụ thẳng đứng có dạng:

$$U(0,0,-h)=\frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{U(r,\varphi,0)}{\left(r^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}rdr \tag{8.84}$$

Phân chia tích phân này ra thành tổng các tích phân trong các miền nhỏ và bỏ qua số hạng dư ta có thể tính tích phân (8.84) dưới dạng sau :

$$U(0,0,-h)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\overline{U}_{ik}\int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}}d\varphi\int_{r_k}^{r_{k+1}}\frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}} \tag{8.85}$$

trong đó $\overline{U}_{ik}$ là giá trị trung bình U(r, φ, 0) trong giới hạn của diện tích tính tích phân. Phương pháp tính tích phân (8.85) phụ thuộc vào phương pháp chọn cận tích phân. Có thể có hai phương pháp chính như sau:

- Các miền tính tích phân được chọn sao cho giá trị của mỗi số hạng trong tổng như nhau. Trong trường hợp đó

$$U(0,0,-h)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\overline{U}_{ik}(\varphi_{i+1}-\varphi_i)\left(\frac{h}{\sqrt{r_k^{\,2}+h^2}}-\frac{h}{\sqrt{r_{k+1}^{\,2}+h^2}}\right) \text{ và nếu đặt}$$

$$\varphi_{i+1}-\varphi_i=\frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{h}{\sqrt{r_k^2+h^2}}-\frac{h}{\sqrt{r_{k+1}^2+h^2}}=\frac{1}{m}$$

$$\varphi_{i+1}-\varphi_i=\frac{2\pi}{n}$$

thì ta có:

$$U(0,0,-h)=\frac{1}{nm}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\overline{U}_{ik}$$

- Cho các cận tích phân tuân theo một quy luật cho trước, trong trường hợp đó ta đưa vào giá trị trung bình trên vòng tròn:

$$\overline{U(r)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(r,\varphi,0)d\varphi$$

Như vậy có thể biểu diễn tích phân Poisson dưới dạng sau:

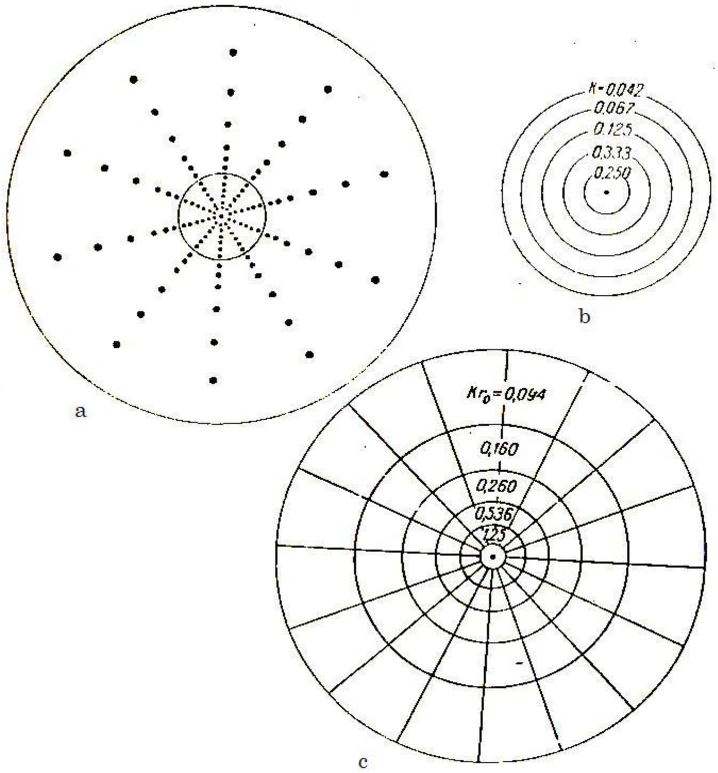
$$U(0,0,-h)=\int_0^{\infty}\overline{U(r)}\frac{hrdr}{\left(r^2+h^2\right)}$$

Như trong trường hợp trên ta lại phân chia tích phân này ra thành các tích phân nhỏ và bỏ qua phần còn lại (sai số) ta có:

$$
\begin{aligned}
U(0,0,-h) &= \frac{1}{2}[\overline{U}(0)+\overline{U}(r_1)]\int_0^{r_1}\frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}} + \\
&\frac{1}{2}[\overline{U}(r_1)+\overline{U}(r_2)]\int_{r_1}^{r_2}\frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}} + \\
&\frac{1}{2}[\overline{U}(r_2)+\overline{U}(r_3)]\int_{r_2}^{r_3}\frac{hrdr}{(r^2+h^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\qquad (8.86)
$$

Sau khi tính tích phân ta có:

$$
\begin{aligned}
U(0,0,-h) &= \frac{\overline{U}(0)}{2}[1-\frac{h}{\sqrt{r_1^2+h^2}}] + \\
&+\frac{\overline{U}(r_1)}{2}[\frac{h}{\sqrt{r_1^2+h^2}}-\frac{h}{\sqrt{r_2^2+h^2}}] + \\
&\frac{\overline{U}(r_2)}{2}[\frac{h}{\sqrt{r_2^2+h^2}}-\frac{h}{\sqrt{r_3^2+h^2}}] + \ldots
\end{aligned}
\qquad (8.87)
$$



Hình 8.8

Các palet Chepkin (a), Malôviscô (b), Vêxêlôp (c) để tính chuyển trường lên cao trong trường hợp bài toán ba chiều hoặc:

$$U(0,0,-h) = K_0\,\overline{U(0)} + K_1\,\overline{U(r_1)} + ... + K_i\,\overline{U(r_i)} = \sum_{i=1}^{m} K_i\,\overline{U(r_i)} \qquad (8.88)$$

trong đó :

$$K_i = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{r_{i-1}^2 + h^2}} - \frac{h}{\sqrt{r_{i+1}^2 + h^2}}\right) \qquad (8.89)$$

Bảng 8.2 Bảng hệ số của palet Malôviscô

r_i	K_i	r_i	K_i
0 1 2	0,1464 0,2864 0,1954	3 4 5	0,1024 0,0600 0,0390

Nếu cho trước các bán kính khác nhau, theo biểu thức (8.89) ta có thể tính được các hệ số K_i. Trong palet của Malôviskô người ta thừa nhận $r_1 = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = ... = h$. Hệ số của palet cho ở bảng 8.2, còn công thức tính toán có dạng

$$U(0,0,-h) = \overline{U(r_6)} + \sum_{i=1}^{5} K_i\left[\overline{U(r_i)} - \overline{U(r_6)}\right] \qquad (8.90)$$

8.5 Trend

Tính toán trend (thành phần trường khu vực) dựa trên các phương pháp tiệm cận mà người ta đã khảo sát nhiều trong các tài liệu tham khảo đặc biệt. Song có sự khác nhau giữa trend và tiệm cận. Tiệm cận là nhằm thu được sự tương ứng tốt nhất giữa các hàm cần nghiên cứu và hàm tiệm cận còn trend thì lại có khuynh hướng biểu diễn bằng giải tích thành phần cơ bản của trường.

Ta hãy khảo sát ngắn gọn các phương pháp tiệm cận nhằm giải quyết các bài toán phân chia các trường địa vật lý.

Để biểu diễn trên đoạn [a,b] hàm số f(x) bằng một hệ thống các hàm đơn giản hơn $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$..., $\varphi_n(x\}$ người ta dùng biểu thức:

$$F_N(x) = a_0\varphi_1 + a_1\varphi_1 + ... + a_N(x) \approx f(x) \qquad (8.91)$$

Các hệ số a_k trong biểu thức này cần được chọn sao cho độ lệch Q giữa hàm cho trước và biểu diễn $F_N(x)$ bé nhất, tức là:

$$Q = \int_a^b \left[F_N(x - f(x))\right]^2 dx \qquad (8.92)$$

Để làm thoả mãn điều kiện đó ta phải cho các đạo hàm $\partial Q/\partial a_i$ bằng không. Điều đó dẫn đến hệ thống các phương trình sau :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_0} = \int_a^b (F - f)\varphi_0 dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_1} = \int_a^b (F - f)\varphi_1 dx = 0$$

……………………………..

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial a_N} = \int_a^b (F - f)\varphi_N dx = 0$$

Để đơn giản ta không viết các biến số trong các hàm. Nếu như trong các phương trình này thay giá trị của F bằng biểu thức của nó từ định nghĩa thì ta có thể thu được:

$$a_0(\varphi_0\varphi_0) + a_1(\varphi_0\varphi_1) + \ldots + a_N(\varphi_0\varphi_N) = (\varphi_0 f)$$

$$a_0(\varphi_0\varphi_1) + a_1(\varphi_1\varphi_1) + \ldots + a_N(\varphi_1\varphi_N) = (\varphi_1 f)$$

....

$$a_0(\varphi_0\varphi_N) + a_1(\varphi_1\varphi_N) + \ldots + a_N(\varphi_N\varphi_N) = (\varphi_N f) \qquad (8.93)$$

trong đó

$$(\varphi_m\varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx$$

$$(\varphi_m f) = \int_a^b \varphi_m(x)f(x)dx$$

$$m = 0,1,2\ldots N \quad ; n = 0,1,2,\ldots,N$$

Sai số trung bình bình phương của phép biểu diễn này có dang.

$$\sigma = \sqrt{Q(b-a)}$$

Hệ thống phương trình (8.93) sẽ đơn giản đi nhiều nếu ta dùng các hệ thống các hàm trực giao làm hệ thống các hàm φ. Các hàm trực giao có tính chất sau :

$$(\varphi_m\varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \text{ khi } m \neq n_m$$

$$(\varphi_n\varphi_n) = \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \qquad \text{khi } m=n$$

Trong trường hợp đó, nếu gọi $(\varphi_n\varphi_n)$ bằng c_n ta có thể viết biểu thức tổng quát cho bất kỳ hệ số a_n nào:

$$a_n = \frac{(\varphi_n f)}{c_n} = \frac{1}{c_n}\int f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (8.94)$$

Khi f(x) cho trước dưới dạng gián đoạn và nếu dùng các hàm luỹ thừa làm các hàm φ ta có:

$$F_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \approx f(x) \qquad (8.95)$$

còn hệ thống phương trình chuẩn hoá dưới ký hiệu Gauss có dạng

$$
\begin{aligned}
Na_0 + a_1\sum x + a_2\sum x^2 + ... a_n\sum x^n &= \sum f \\
a_0\sum x + a_1\sum x^2 + ...\, a_n\sum x^{n+1} &= \sum xf \\
.... & \\
a_0\sum x^n + a_1\sum x^{n+1} + ... a_n\sum x^{2n} &= \sum x^n f \qquad (8.96)
\end{aligned}
$$

Trong phương pháp trend để tách các thành phần có liên quan đến hàm luỹ thừa bậc thấp thì số phương trình thường không lớn và việc giải phương trình chính tắc cũng đơn giản. Ví dụ nếu trên mặt phẳng cần phải tách phông tuyến tính:

$$F_N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y \qquad (8.98)$$

còn trong trường hợp tách phông bâc hai ta có

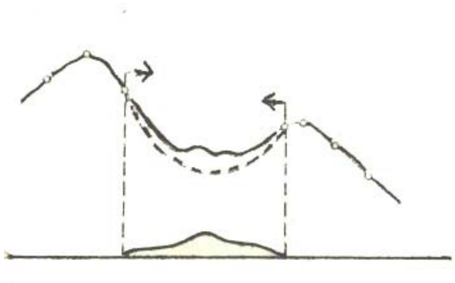
$$F_N(x,y) = a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{02}y^2+a_{22}xy \qquad (8.98)$$

Thông thường các phương trình chính tắc được giải trên các máy tính điện tử.

Nhemxôp[1967] đã đề nghị dùng đa thức nội suy Lagrange. Nhờ có các đa thức này mà hàm số U có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$U(x) = L_0(x)U_0 + L_1(x)U_1 + L_2(x)U_2 + ... + L_n(x)U_n \qquad (8.99)$$

Trong biểu thức này U_k là các giá trị trường tại các điểm "không nhiễu loạn" ; k = 0, 1, 2, ..., n (Hình 8.9). Tại điểm x_k, tất cả các đa thức đó đều bằng không, trừ giá trị $L_k(x)$. Giá trị của hàm này trong trường hợp đó bằng đơn vị và vì vậy ta có $U(x_k) = U_k$. Cấu tạo của các đa thức này có dạng:



Hình 8.9

Tiệm cận trường bằng đa thức Lagrange

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2).(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)...(x_0-x_n)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2).(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)...(x_1-x_n)}$$

$$L_n = \frac{(x-x_0)(x-x_1).(x-x_2)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)...(x_n-x_{n-1})}$$

Tử số trong mỗi một đa thức được tạo thành từ các thừa số nhân tuyến tính x - x_k trừ điểm mà tại đó x =x_k, trong đó k là số hiệu của đa thức, còn mẫu số chính là giá trị của đa thức đó khi x= x_k. Ví như khi nội suy tuyến tính (bậc nội suy của đa thức bằng 1) ta có:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = 1 - x$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = x$$

Chính bản thân hàm nội suy bằng:

$$U(x) = (1- x)U_0 + xU_1 \qquad (8.100)$$

Nội suy bậc ba khi bước Δx đều và khi sử dụng 4 điểm được thực hiện theo công thức

$$U = -\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)U_{-1} + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2)U_0 + \\ -\frac{1}{2}(x+1)x(x-2)U_1 + \frac{1}{6}(x+1)x(x-1)U_2$$

Nhờ có đa thức Lagrange mà ta có thể thực hiện được phép nội suy khi có các bước Δx không đều.

8.6 Tách các dị thường địa phương

Với quan điểm lọc, việc tách các dị thường địa phương tương đương với phép cắt các tần số thấp. Ta có thể suy ra rằng thành phần tần số cao của phổ trường được biến đổi có dạng:

$S(\omega) = S_0(\omega)\, H(\omega)$

phải bằng không khi ω = 0. Từ phép biến đổi Fourier:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

trong đó F(x) là hàm số trường đã được biến đổi. Vì S(ω) = 0 khi ω = 0 ta có thể suy ra rằng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 0$$

Tích phân này biểu thị diện tích giới hạn giữa hàm đã được biến đổi với trục x. Diện tích này chỉ có thể bằng không được khi khi F(x) có chứa các giá trị âm. Sử dụng tích phân chập khi cho trước trường dưới dạng gián đoạn ta có thể viết:

$$F(x) = \sum_{i=-n}^{n} h_i f(x + i\Delta x)$$

Rõ ràng rằng khi hàm xuất phát f(x) không có các giá trị âm thì các giá trị của h_n phải lần lượt thay đổi dấu.

Khi biến đổi địa phương trên cơ sở phép tính vi phân thì điều kiện sau đây phải được thoả mãn:

$$\sum_{i=-n}^{n} h_i = 0$$

vì khi f(x)=const tất cả các đạo hàm phải bằng không.

8.6.1 Vi phân bằng số

Phương pháp vi phân bằng số dựa trên việc sử dụng các đa thức nội suy. Hàm cần tính vi phân (hàm xuất phát) cho trước tại các điểm nút được biểu diễn dưới dạng các đa thức nội suy.

Ví dụ trong trường hợp bài toán hai chiều nếu dùng đa thức nội suy Stirling thì đạo hàm $\partial U/\partial x$ tại điểm x_0 có dạng:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \approx \frac{1}{h}\left(\frac{\Delta_{y-1} + \Delta_y}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3_{y-2} + \Delta^3_{y-1}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5_{y-3} + \Delta^5_{y-2}}{2}\right) \quad (8.101)$$

trong đó Δ^n là hiệu số giới nội hạng n.

Quy luật biểu diễn các hệ số giới nội như sau:

$x_{-2} U_{-2}$

$\Delta U_{-2} = U_{-1} - U_{-2}$

$x_{-1} U_{-1}$ $\Delta^2 U_{-2} = \Delta U_{-1} - \Delta U_{-2}$

$\Delta U_{-1} = U_0 - U_{-1}$; $\Delta^3 U_{-2} = \Delta^2 U_{-1} - \Delta^2 U_{-2}$

$x_0 U_0$ $\Delta^2 U_{-1} = \Delta U_0 - \Delta U_{-1}$; $\Delta^4 U_{-2} = \Delta^3 U_{-1} - \Delta^3 U_{-2}$

$\Delta U_0 = U_1 - U_0$; $\Delta^3 U_{-1} = \Delta^2 U_0 - \Delta^2 U_{-1}$

$x_1 U_1$ $\Delta^2 U_0 = \Delta U_1 - \Delta U_0$

$\Delta U_1 = U_2 - U_1$

$x_2 U_2$

Việc áp dụng công thức (8.101) đòi hỏi phải giảm có quy luật số các số gia giới nội và tăng bậc của chúng. Để có thể áp dụng công thức trên vào các máy tính điện tử cần phải biến đổi để thay các số gia giới nội qua các giá trị hàm U_i. Ví dụ khi sử dụng hai điểm:

$$U'(x) \approx \frac{1}{2h}\left(U_{-1} - U_1\right) \quad (1.102)$$

còn khi sử dụng bốn điểm thì:

$$U'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\frac{2\left(U_{-1} - U_1\right)}{3} - \frac{U_2 - U_{-2}}{12}\right] \quad (8.103)$$

lúc 6 điểm được sử dụng thì

$$U'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\frac{3(U_1 - U_{-1})}{4} - \frac{3(U_2 - U_{-2})}{20} + \frac{U_3 - U_{-3}}{60}\right]$$

(8.104)

Theo các thành phần đạo hàm nằm ngang U_x và U_y tính được theo các công thức trên ta có thể dễ dàng tính gradient nằm ngang G của hàm.

$$|G| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

Nếu vi phân công thức Stirling hai lần và thay các số gia giới nội bằng các biểu thức của chúng ta tính được các đạo hàm bậc hai.

Với 3 điểm ta có:

$$U''(x_0) = \frac{1}{h^2}(U_1 - 2U_0 + U_{-1}) \tag{8.105}$$

với 5 điểm:

$$U''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{8}{6}(U_1 + U_{-1}) - \frac{15}{6}U_0 - \frac{1}{12}(U_2 + U_{-2})\right] \tag{8.106}$$

với 7 điểm

$$U''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\frac{8(U_1 + U_{-1})}{6} - \frac{49}{18}U_0 - \frac{3}{20}(U_2 - U_{-2}) + \frac{1}{90}(U_3 + U_{-3})\right] \tag{8.107}$$

Bậc của đạo hàm càng tăng thì sai số tính toán càng lớn vì do sai số trong khi xác định U_i. Vì vậy trong thực tế người ta ít khi tính đạo hàm cao hơn bậc hai. Hiện nay với việc áp dụng các từ kế lượng tử, các sai số đo đạc giảm đi đáng kể nên ta hãy dừng lại để khảo sát các phương pháp tính đạo hàm thẳng đứng $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$. Phương trình Laplace là cơ sở cho phép tính toán có dạng:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$$

Công thức này cho phép tính các đạo hàm bậc hai thẳng đứng qua việc tính toán các đạo hàm bậc hai nằm ngang. Một số công thức tính toán thu được như sau:

$$U''_x = \frac{2}{h^2}\left(U - \overline{U}_{1x}\right)$$

$$U''_y = \frac{2}{h^2}\left(U - \overline{U}_{1y}\right)$$

Từ đó

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{4}{h^2}\left(U_0 - \overline{U}_h\right) \tag{8.108}$$

trong đó:

$\overline{U_h}$ là giá trị trung bình của trường trên vòng tròn bán kính h. Khi sử dụng mạng lưới ô vuông trong quan sát với cạnh hình vuông 2h thì bán kính vòng tròn sẽ là $h\sqrt{2}$. Lúc đó các công thức trên sẽ có dạng:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{2}{h^2}\left[U_0 - \overline{U}_{h\sqrt{2}}\right] \tag{8.109}$$

Tương tự, các công thức sau được áp dụng cho các quan sát trên các vòng tròn khác nhau:

- Theo hai vòng tròn:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{2}{6h^2}\left[-15U_0 + 16\overline{U}_h - \overline{U}_{2h}\right] \tag{8.110}$$

- Theo ba vòng tròn:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{2}{18h^2}\left[-45U_0 + 54\overline{U}_h - 5{,}4\overline{U}_{2h} - 0{,}4\overline{U}_{3h}\right] \tag{8.111}$$

Để gạt bỏ bớt các sai số do việc tính giá trị U_0, trong nhiều trường hợp thực tế thay cho giá trị U_0 người ta lấy giá trị trung bình trên một vòng tròn nào đó. Lúc đó công thức tính đạo hàm hạng hai có dạng:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{4}{f(r,R)}\left(\overline{U}_r - \overline{U}_R\right)$$

Biểu thức của f(r) cần phải được chọn sao cho khi r -> 0 thì $\overline{U}_r -> 0$, thứ nguyên của nó tương ứng với thứ nguyên bình phương khoảng cách. Vì vậy ta có thể có công thức:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{4}{R^2 - r^2}\left(\overline{U}_r - \overline{U}_R\right) \tag{8.112}$$

Một trong những dạng đặc biệt của phép tính đạo hàm là công thức Sacxov- Nigarrd. Công thức này thường được dùng trong phương pháp thăm dò trọng lực:

$$F(U) = \frac{1}{R - r}\left(\overline{U}_r - \overline{U}_R\right) \tag{8.113}$$

Hàm F(U) không có thứ nguyên là đạo hàm bậc hai nhưng nó chỉ khác với (8.112) một thừa số nhân mà thôi.

Phép biến thiên cũng được sử dụng để tách trường địa phương:

$$\delta U = \overline{U}_0 - \overline{U}_h$$

8.6.2 Tính đạo hàm thẳng đứng

Tính gradient thẳng đứng của Z, $(\Delta T)_a$ dựa trên việc sử dụng tích phân Poisson. Theo công thức tính chuyển trường lên nửa không gian trên

$$U(0,0,-z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\varphi,\rho,0)z\rho d\rho}{\left(z^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$U(0,0,-z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U(\varphi,\rho,0)z\rho d\rho}{\left(z^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

nếu ta thực hiện phép tính tích phân theo φ (tương đương với việc tính giá trị trung bình trường trên vòng tròn) ta thu được:

$$U(0,-z)=\int_0^{\infty}\frac{\overline{U}(\rho,0)z\rho d\rho}{\left(z^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{8.114}$$

trong đó:

$$\overline{U}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Ud\alpha$$

Từ đó ta có công thức tính đạo hàm thẳng đứng như sau:

$$\frac{\partial U(0,-z)}{\partial z}=-\frac{\partial U(0,z)}{\partial z}=\int_0^{\infty}\frac{\left(\overline{U}(\rho,0)-U(0,0)\right)z\rho d\rho}{\left(x^2+\rho^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Khi cho z ->0 ta có:

$$\frac{\partial U(0,0)}{\partial z}=\int_0^{\infty}\left[U(0,0)-\overline{U}(\rho,0)\right]\frac{d\rho}{\rho^2} \tag{8.115}$$

Để tính tích phân này người ta chia miền lấy tích phân ra thành ba miền $[0, R_0]$, $[R_0, R]$, $[R, \propto]$ và biểu diễn các tích phân đó lần lượt qua J_1, J_2, J_3. Chọn R_0 đủ nhỏ để J_1 gần bằng không và R sao cho J_3 cũng có thể bỏ qua được, lúc đó ta chỉ có J_2 mà thôi. Với khoảng tính tích phân $[R_0, R]$ ta chia ra thành n khoảng nhỏ $[\rho_n, \rho_{n+1}]$ và trong mỗi một khoảng đó sử dụng lý thuyết trung bình ta có:

$$\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\left[U(0,0)-\overline{U}(\rho,0)\right]\frac{d\rho}{\rho^2}=\left[U(0,0)-\overline{U}(\rho,0)\right]\frac{\rho_{n+1}-\rho_n}{\overline{\rho}_n^2}=$$
$$=\delta U(\overline{\rho}_n)\frac{\Delta\rho_n}{\overline{\rho}_n^2}$$

với:

$$\overline{\rho_n}=\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}} \quad .$$

Từ đó giá trị của tích phân J_2 sẽ là:

$$J_2=\sum_{i=0}^{n}\delta U(\overline{\rho}_n)\frac{\Delta\rho_i}{\overline{\rho}_i^2}=\sum_{i=0}^{n}\delta U(\overline{\rho}_i)K_i \tag{8.116}$$

Trong trường hợp bài toán hai chiều ta có thể viết:

$$\frac{\partial U(0)}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[U\left(0 - \overline{U}(x)\right)\right]\frac{dx}{x^2} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=0}^{n}\delta U(x_i)K_i' \qquad (8.117)$$

Theo các công thức tương ứng, tính trước các hêi số K_i rồi sau đó theo (8.116) và (8.117) ta tính được các đạo hàm của các thành phần trường theo phương thẳng đứng.

8.7 Tiếp tục giải tích trường xuống nửa không gian dưới

Trong trường hợp tổng quát, trường tại mức thấp h so với mức không (h bé hơn độ sâu đến điểm đặc biệt gần nhất), liên hệ với trường xuất phát tại mức không bằng công thức Poisson, trong trường hợp hai chiều:

$$U(x,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, h)\frac{h d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2} \qquad (8.118)$$

Tích phân này thuộc phương trình Fredhom hạng một với nhân:

$$K_2(x,\xi) = \frac{h}{\pi}\frac{1}{[(x-\xi)^2 + h^2]}$$

Người ta dùng phương pháp phổ để giải phương trình này. Như trên, theo lý thuyết của tích phân chập ta có:

$$S_0(\omega) = S_h(\omega)H(\omega)$$

Dùng biến đổi Fourier dạng cosin ta có thể viết $S_0(\omega)$ dưới dạng:

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)\cos\omega x dx$$

Tính đến biểu thức của $H(\omega)$ ta có thể viết:

$$S_h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)e^{|\omega|h}dx$$

Chuyển từ phổ sang hàm ta có:

$$U(\xi, h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{|\omega|h}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)\cos\omega dx$$

Để thực hiện việc tính toán ta chia miền tính tích phân theo ω ra thành hai phần:

$$U(0,h) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{a} e^{\omega h}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)\cos\omega dx + \frac{1}{\pi}\int_{a}^{\infty} e^{\omega h}d\omega\int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)\cos\omega dx$$

Khi a đủ lớn bỏ qua tích phân thứ hai ta có:

$$U(0,h =)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,0)\left\{\frac{h\left(e^{ah}\cos ax - 1\right)}{x^2 + h^2} + \frac{x\left(e^{ah}\sin ax\right)}{x^2 + h^2}\right\}dx$$

Dùng công thức tính tích phân hình thang với các điều kiện $\Delta x=h$, $x=n\Delta x$ (trong trường hợp này a là tần số giới hạn), ta thu được công thức tính toán cuối cùng như sau (Công thức Reinboi)

$$U(0,h)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=\infty}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\pi}-1\right)\frac{U(n\Delta x,0)}{1+n^2} \qquad (8.119)$$

Việc tính toán theo công thức này khi h lớn gặp phải sai số đáng kể. Nhìn chung việc giải phương trình tích phân trên thuộc việc giải các bài toán đặt ra không chỉnh. Bài toán được đặt ra không chỉnh là bài toán mà sai số gặp phải khi cho trước các giá trị U(x,0) sẽ ảnh hưởng rất lớn đến kết quả của nghiệm thu được.

Điều đó có nghĩa là khi cho trước giá trị gần đúng $U(x) = U_\delta(x)$ thì sẽ tồn tại không phải một hàm mà là tập hợp các hàm $\widetilde{V}(\xi) = U(\xi,h)$ thoả mãn phương trình tích phân trên với độ lệch trung bình bình phương δ^2:

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A(x,\widetilde{V})-U_\delta(x)]^2\,dx \le \delta^2 \qquad (8.120)$$

trong đó:

A biểu diễn toán tử thực hiện việc giải phương trình tích phân (8.118).

Hơn nữa trong số các nghiệm $\widetilde{V}(\xi)$ có thể có những nghiệm khác rất ít so với $\overline{V}(\xi)$ tương ứng với giá trị cho trước $\overline{U}(x,0)$. Để giải lớp các bài toán này Chikhônôp đã đề ra phương pháp điều chỉnh dựa trên việc làm cực tiểu phiếm hàm sau đây bằng thông số. Ví dụ với phương trình (8.118) ta chọn phiếm hàm

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 d\xi \qquad (8.121)$$

Như vậy từ các nghiệm gần đúng $V_\delta(x)$ ta cần phải chọn nghiệm sao cho nó không những phải làm cực tiểu độ lệch trung bình bình phương đối với trường cho trước $\widetilde{U}_\delta(x)$ theo điều kiện (8.120) mà còn phải làm cho phiếm hàm (8.121) cực tiểu.

Thuật toán điều chỉnh đảm bảo nghiệm thu được gần với nghiệm chính xác khi δ ->0. Kết hợp đồng thời hai điều kiện (8.120) và (8.121) ta thu được phiếm hàm:

$$M_\alpha[V]=\int_{-L}^{L}\left[\int_{-1}^{1}K_z(x,\xi)d\xi-\widetilde{U}_\delta(x)\right]^2 dx+\alpha\int_{-1}^{1}\left(\frac{dV}{d\xi}\right)^2 d\xi \qquad (8.122)$$

Bằng các phương pháp tính biến thiên và dựa trên phương trình Euler ta có thể tìm được nghiệm tương ứng với việc làm cực tiểu (8.120) và thoả mãn các điều kiện biên V' (l) =V' (-l) = 0. Nhưng vì trong thực tế khó xác định và cho trước δ nên người ta dùng thuật toán điều chỉnh đã được đơn giản hoá thể hiện bằng phương trình:

$$\int_{-L}^{L}K_z(x,\xi)V(\xi)d\xi-dV''(x)=\widetilde{U}_\delta(x) \qquad (8.123)$$

với các điều kiện biên như sau: V'(-L) =V'(L)=0

Nhờ có thuật toán này ta có thể tính chuyển trường đến mức z bằng cách thay đổi α và lần lượt tính những nhóm hàm $\widetilde{V}_\alpha(x)$ và chọn α sao cho điều kiện sau được thoả mãn:

$$\sigma(x) = \max\left|\alpha \frac{dV(\xi)}{d\alpha}\right| = \min$$

Bằng phương pháp phân tích thành phổ Fourier cho các hàm K_z và $U_\delta(x)$ ta có thể tính được hàm biến đổi như sau:

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{U}_n e^{\frac{\pi n}{L}z} \cos(\frac{\pi nx}{L}).\gamma_n(\alpha) \tag{8.124}$$

trong đó U_n là các hệ số trong khai triển Fourier của trường xuất phát $U_\delta(x)$ trên mặt đất z=0, còn $\gamma_n(\alpha)$ là hệ số chuẩn hoá

$$\gamma_n(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha\left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 e^{\frac{\pi n}{L}z}} \tag{8.125}$$

Phương pháp khai triển Fourier cũng có thể áp dụng cho cả trường hợp bài toán ba chiều.Trong trường hợp đó (8.124) được thay thế bằng:

$$V(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{V}_{kl}(z)\cos\frac{2\pi kx}{L}\cos\frac{\pi ly}{D} \tag{8.126}$$

trong đó:

$$\widetilde{V}_{kl}(z) = \widetilde{U}_{kl} e^{\pi z\sqrt{\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{D}\right)^2}}\gamma_{kl}(\alpha)$$

$$\widetilde{U}_{kl} = \frac{4}{LD}\int_0^L\int_0^D \widetilde{U}_\delta(\eta,\xi)\cos\frac{2\pi k}{L}\xi\cos\frac{\pi l}{D}\eta\, d\xi d\eta \tag{8.127}$$

$$\gamma_{kl}(\alpha) = \left\{1+\alpha\left[\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2+\left(\frac{\pi l}{D}\right)^2\right]e^{\pi z\sqrt{\left(\frac{k}{L}\right)^2+\left(\frac{l}{D}\right)^2}}\right\}^{-1}$$

Độ nhẵn của phép biến đổi gần đúng được tính bằng công thức sau:

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] dxdy$$

Nhờ có các thuật toán này phép tiếp tục giải tích xuống dưới có thể thực hiện được đến bất kỳ mức z < H.

8.8 Tính chuyển lẫn nhau giữa các thành phần của trường từ

Các phép tính chuyển này nhiều khi rất có lợi cho việc phân tích các dị thường từ. Thông thường các phép tính chuyển này là : Tính H_a từ Z_a, tính Z_a từ $(\Delta T)_a$, chuyển trường $(\Delta T)_a$ về cực và về xích đạo.

8.8.1 Tính thành phần nằm ngang H_a từ thành phần thẳng đứng Z_a

Phép biến đổi này được thực hiện trên cơ sở giải bài toán Nôi man. Biểu thức để tính H qua Z được thực hiện qua công thức:

$$H(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(x)}{x} dx \tag{8.128}$$

Tích phân này bằng không nếu ta thay Z(x) bằng Z(0) vì vậy ta có thể viết lại công thức trên dưới dạng:

$$H(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(x) - Z(0)}{x} dx \tag{8.129}$$

Công thức (8.129) được tính toán dưới dạng tổng:

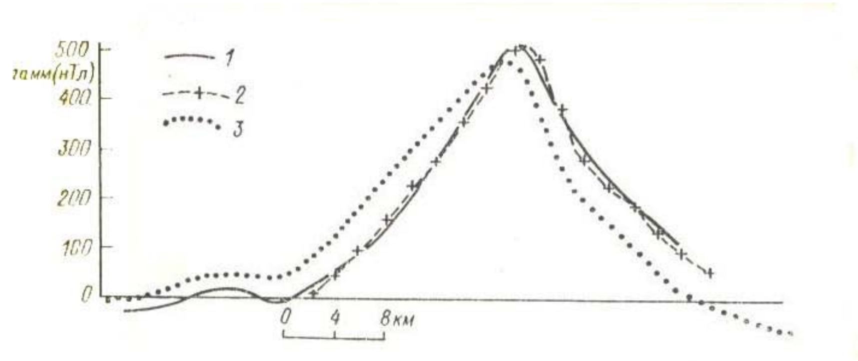
$$H(0) = \sum_{i=0}^{n} C_i \left[Z(x_i) - Z(x_{-i})\right] \tag{8.130}$$

Gía trị của các hệ số C_n cho ở bảng sau:

x_n	0,5	1,0	2,0	4,0	8,0	16,0
C_n	0,52454	0,29808	0,25268	0,23542	0,22889	0,22415

8.8.2 Tính chuyển Z_a từ $(\Delta T)_a$.

Tính chuyển Z_a từ $(\Delta T)_a$ nhiều khi được tiến hành nhằm so sánh các số liệu đo đạc trên mặt đát với các số liệu đo từ hàng không. Về nguyên tắc phép tính chuyển này được thực hiện nếu sử dụng khái niệm về thế từ.



Hình 8.10

Tính chuyển trường $(\Delta T)_a$ thành trường Z_a

1. Đường cong quan sát Z_a. 2. Đường cong Z_a tính được từ ΔT_a.

3. Đường cong ΔT_a quan sát.

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Delta T(\alpha, l) S(\alpha, i) dl d\alpha \qquad (8.131)$$

trong đó

$$S(\alpha, i) = -\cos I_0 - \frac{\cos\alpha \cos I_0 \sin I_0}{\cos^2\alpha + \cos^2 I_0 \sin^2\alpha}(1 - \sin I_0 \cos\alpha)$$

I_0 là độ từ khuynh bình thường.

Hình 8.10. cho ta khái niệm về độ chính xác của phép tính chuyển.

Công thức (8.131) tương tự với công thức Malkin dựa trên mối liên hệ giữa thế từ và thế trọng lực.

Trong trường hợp bài toán hai chiều ta có thể dùng công thức

$(\Delta T)_a = Z_a \sin I_0 + H_a \cos I_0 \cos\delta$

δ là phương vị của tuyến quan sát. Nếu thay H_a qua Z_a trong phương trình đó thì ta thu được phương trình tích phân như sau:

$$(\Delta T)_a = Z_a \sin I_0 + \frac{\cos I_0 \cos\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi)}{\xi - x}d\xi \qquad (8.132)$$

Phương trình này có nghiệm dưới dạng:

$$Z_a = \frac{1}{\sin^2 I_0 + \cos^2 I_0 \cos^2\delta}[\Delta T \sin I_0 - \frac{\cos I_0 \cos\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta T(\xi)}{\xi - x}d\xi] \qquad (8.133)$$

8.8.3 Tính chuyển trường về cực

Trong trường hợp tổng quát trường $(\Delta T)_a$ được biểu diễn qua thế từ dưới dạng sau:

$$(\Delta T)_a = -\mu_0 \frac{\partial^2 V}{d\nu d\lambda} \tag{8.134}$$

trong đó vi phân theo hướng ν có nghĩa là vi phân theo phương từ hoá còn theo λ là vi phân theo trường địa từ bình thường.

Vì vậy, tại cực cả hai hướng này khi từ hoá cảm ứng trùng với phương thẳng đứng cho nên ta có:

$$(\Delta T)_{ap} = -\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{8.135}$$

Giả sử rằng trong biểu thức (8.134) hướng của ν và λ trùng nhau và ta tiến hành vi phân nó hai lần theo z còn (8.135) được vi phân hai lần theo λ thì lúc đó ta có

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}(\Delta T)_{ap} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Delta T)_a \tag{8.136}$$

Như vậy từ phương trình (8.136) ta thấy rằng để có thể thu được $(\Delta T)_{ap}$ ta phải lấy đạo hàm hai lần trường $(\Delta T)_a$ và sau đó tính tích phân hai lần theo hướng trường bình thường. Tại bắc bán cầu tích phân phải được tiến hành theo hướng ngược với hướng từ hoá bình thường. Phương pháp tính $(\Delta T)_{ap}$ theo $(\Delta T)_a$ trong trường hợp bài toán ba chiều đươc Baranov khảo sát. Công thức tính cuối cùng có dạng:

$$(\Delta T)_{ap} = \sum_k \sum_n C_{k,n} (\Delta T)_{a\,k\,n} \tag{8.137}$$

trong đó $C_{k,n}$ là các hệ số, còn $(\Delta T)_{a,k,n}$ là giá trị của $(\Delta T)_a$ tại các nút của mạng lưới ô vuông.

Trong trường hợp này, ta cũng có thể dùng phương pháp khai triển Fourier để thực hiện phép tính chuyển trường về cực.

Trong miền tần số, các biến đổi Fourier của các đại lượng chuyển trường về cự liên hệ với nhau như sau:

$$S_{ap}(\omega) = H_{ap}(\omega) S_0(\omega) \tag{8.138}$$

với $S_{ap}(\omega), H_{ap}(\omega), S_0(\omega)$ lần lượt là phổ Fourier của trường đã được chuyển về cực, nhân chuyển trường về cực và phổ của trường dị thường từ toàn phần, với

$$H_{ap}(\omega) = \frac{u^2 + v^2}{a_1 u^2 + a_2 v^2 + a_3 uv + i\sqrt{u^2 + v^2}\,(b_1 u + b_2 v)} \tag{8.139}$$

trong đó $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$

$$u = 2\pi \frac{k}{n\Delta x}, v = 2\pi \frac{l}{m\Delta y}, \tag{8.140}$$

L chiều dài của vùng nghiên cứu. n +1 là số điểm trwn tuyến L, D chiều rộng của vùng nghiên cứu, m+1 là số điểm trên hướng D. (k=0,1,..., n, l=0, 1, ..., m).

$$L = n\Delta x,\ D = m\Delta y$$

Các hệ số a, b được xác định như sau :

$$a_1 = m_z f_z - m_x f_x$$

$$a_2 = m_z f_z - m_y f_y$$

$$a_3 = -m_y f_x - m_x f_y$$

$$b_1 = m_x f_z + m_z f_x$$

$$b_2 = m_y f_z + \vec{m}_z f_y$$

trong đó

$\vec{m}$ là vectơ đơn vị của độ từ hoá.

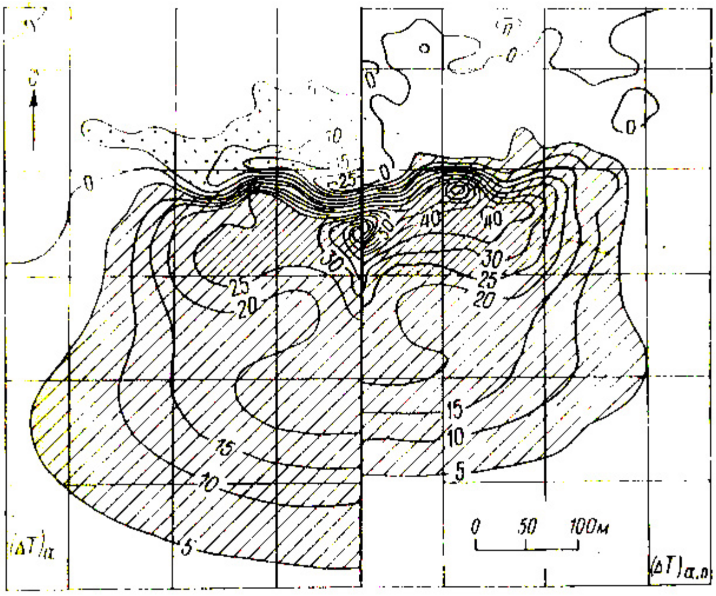
$\vec{f}$ là vec tơ đơn vị của trương từ toàn phần khu vực

Trong trường hợp bài toán hai chiều theo hướng này người ta đã sử dụng mối liên hệ giữa các thành phần thẳng đứng và nằm ngang trong trường hợp từ hoá thẳng đứng (Z^*_a và H^*_a) và từ hoá nghiêng (H_a và Z_a)

$$H_a = - Z^*_a \cos I_0 + H^*_a \sin I_0 \sin\delta$$

$$Z_a = Z^*_a \sin I_0 + H^*_a \cos I \cos\delta$$

Giải hệ thống phương trình này Simônencô đã thu được biểu thức để tính Z^*_a:



Hình 8.11

Kết quả tính chuyển trường về cực

$$z_A^* = (\Delta T)_{ap} = \frac{1}{\sin^2 I_0 + \cos^2 I_0 \cos\delta}[Z_a \sin I_0 \times \times \frac{\cos I_0 \cos\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a}{x-\xi}d\xi] \tag{8.141}$$

Nếu biểu diễn Z_a qua $(\Delta T)_a$ theo phương trình (8.133) ta thu được công thức cuối cùng để tính $(\Delta T)_{ap}$ qua $(\Delta T)_a$

$$(\Delta T)_{ap} = \frac{1}{\sin^2 I_0 + \cos^2 I_0 \cos\delta}\times \times[(\sin^2 I_0 - \cos^2 I_0 \cos^2\delta)(\Delta T)_a(x) - \frac{\sin 2I_0 \cos\delta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\Delta T)_a(x)}{x-\xi}d\xi] \tag{8.142}$$

Tích phân trong (8.142) được tính tương tự như trong trường hợp tính H qua Z trong (8.130).

Trên Hình 8.11 là minh hoạ một kết quả tính chuyển trường về cực.

8.8.4 Phương pháp quy trường về xích đạo

Các dị thường từ thường bất đối xứng và bị lệch đi một bên nhất là ở những vùng gần xích đạo từ như miền nam Việt nam nên thường rất khó minh giải. Để loại trừ các ảnh hưởng nêu trên, phương pháp chuyển trường về cực (Baranov. 1957 và 1975) và phương pháp chuyển trường về xích đạo (Leu, 1982) đã được sử dụng. Trong hai phương pháp này, phương pháp quy trường từ về xích đạo thích hợp cho vùng vĩ độ thật thấp.

a. Các mối quan hệ vi phân.

Nếu gọi U và V lần lượt là thế trọng lực và thế từ của một vật thể đồng nhất có mật độ là ρ và thành phần của độ từ hoá dọc theo hướng ν là I_ν, theo công thức Poisson (1.45) ta có:

$$V = -\frac{1}{4\pi}\frac{I_\nu}{k\rho}\frac{\partial U}{\partial \nu} \tag{8.143}$$

trong đó k là hằng số hấp dẫn.

Nếu gọi $\Delta T_{\lambda\nu}$ là thành phần thứ λ của trường từ thì :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_{\lambda\nu}}{I_\nu} &= -\frac{\mu_0}{I_\nu}\frac{\partial V}{\partial \lambda} = -\frac{\mu_0}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda\partial\nu} = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\nu\partial\lambda} = -\frac{\mu_0}{I_\lambda}\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\Delta T_{\nu\lambda}}{I_\lambda} \end{aligned} \tag{8.144}$$

Đây chính là tính hoán đảo của trường từ.

b. Công thức cơ bản của phép biến đổi

Nếu gọi ΔT_1 và ΔT_2 là các thành phần của trường dị thường từ toàn phần do cùng một vật thể ở hai độ sâu khác nhau gây ra, từ (8.143) ta có thể viết :

$$\Delta T_1 = -\mu_0\frac{\partial V}{\partial\lambda_1} = -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda_1\partial\nu_1}$$

$$\Delta T_2 = -\mu_0\frac{\partial V}{\partial\lambda_2} = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda_2\partial\nu_2} \tag{8.145}$$

với λ là phương của trường địa từ bình thường, ν là phương của vectơ từ hoá; $I_1 = I_{\nu 1}$, $I_2 = I_{\nu 2}$; $\frac{\partial}{\partial\nu}$ là vi phân tại điểm nguồn; $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ là vi phân tại điểm quan sát. Vì vậy ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\lambda_2\partial\nu_2}(\Delta T_1) &= \frac{\partial^2}{\partial\lambda_2\partial\nu_2}\left[-\frac{\mu_0 I_1}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda_1\partial\nu_1}\right] = \\ &= I_1\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\nu_1}\left[-\frac{\mu_0}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda_2\partial\nu_2}\right] = \frac{I_1}{I_2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\nu_1}(\Delta T_2) \end{aligned} \tag{8.146}$$

Đây là mối quan hệ giữa dị thường từ toàn phần do cùng một vật thể được từ hoá đồng nhất có phương biết trước đặt ở hai vị trí khác nhau gây ra.

Nếu ΔT_1 là trường dị thường từ quan sát, ΔT_2 là trường dị thường qui về xích đạo, giả thiết sự từ hoá ở xích đạo thì song song với trường địa từ bình thường có biên độ từ hoá bằng biên độ từ hoá ở vùng quan sát nên I_1/I_2 trong (8.143) trở thành đơn vị, ta viết lại:

$\Delta T_1 = \Delta T_{\lambda\nu}$ (bản đồ quan sát)

$\lambda_1 = \lambda$

$\nu_1 = \nu$

$I_1 = I_\nu$

$\Delta T_2 = \Delta T_E$ (bản đồ qui về xích đạo)

$\lambda_2 = x$ (Phương bắc từ)

$\nu_2 = x$

$I_2 = I_\nu$

Vậy (8.143) trở thành:

$$\frac{\partial^2(\Delta T_{\lambda\nu})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2(\Delta T_E)}{\partial\lambda\partial\nu} \qquad (8.147)$$

Cũng như trong trường hợp chuyển trường về cực, công thức (8.144) biểu thị mối quan hệ vi phân về trường quy về xích đạo đối với trường quan sát được.

c. Quan hệ giữa trường từ quy về xích đạo và trường từ quy về cực.

Xét các biểu thức quy trường về cực và về xích đạo:

$$\Delta T_p = \Delta Z_p = -\frac{\mu_0 h T_p}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (8.148)$$

$$\Delta T_E = \Delta H_E = -\frac{\mu_0 h T_E}{4\pi k\rho}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (8.149)$$

trong đó h là hệ số tỷ lệ, T_P, T_E lần lượt là giá trị trường địa từ bình thường ở cực và xích đạo. Thế trọng lực U thoả mãn phương trình Laplace và đối với một vật thể hai chiều theo phương đông- tây (hay phương y) ta có :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \text{ do đó } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad (8.150)$$

Thay (8.148), (8.149) vào (8.150) ta thu được:

$$\Delta T_P = -(T_P/T_E)\,\Delta T_E \qquad \Delta T_p = -\frac{T_p}{T_E}\Delta T_E \qquad (8.151)$$

Công thức (8.151) cho thấy dị thường từ toàn phần ở xích đạo và ở cực có cùng bản chất, chúng chỉ có thể khác nhau về độ lớn và về dấu mà thôi.

d. Công thức quy trường về xích đạo.

Nếu gọi $S_{\lambda\nu}(\alpha,\beta)$, $S_E(\alpha,\beta)$ lần lượt là phổ Fourier của các trường $\Delta T_{\lambda\nu}(x,y)$ và $\Delta T_E(x,y)$ thì :

$$\Delta T_{\lambda\nu}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\lambda\nu}(\alpha,\beta) Q d\alpha d\beta \quad (8.152)$$

$$\Delta T_E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_E(\alpha,\beta) Q d\alpha d\beta \quad (8.153)$$

với $$Q = e^{[i(\alpha x+\beta y)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z]};\quad i=\sqrt{-1} \quad (8.154)$$

Vì
$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\nu} = \lambda_1\nu_1\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \lambda_1\nu_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (\lambda_1\nu_3 + \lambda_3\nu_1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z} + \lambda_3\nu_2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + \lambda_3\nu_3\frac{\partial^2}{\partial^2 z} \quad (8.155)$$

trong đó λ_1 = cos I, $\lambda_2 = 0$, λ_3 = sinI; ν_1, ν_2, ν_3 lần lượt là cosin chỉ phương của λ và ν; I là độ từ khuynh của $\Delta T_{\lambda\nu}$.

Lấy vi phân (8.149) và (8.150) dưới dạng (8.152) rồi thu lại thành một phương trình:

$$S_E(\alpha,\beta) = -\frac{\alpha^2 S_{\lambda\nu}(\alpha,\beta)}{F(\alpha,\beta)} \quad (8.156)$$

với $F(\alpha,\beta) = -\lambda_1\nu_1\alpha^2 - \lambda_1\nu_1\alpha\beta + \lambda_3\nu_3(\alpha^2+\beta^2) +$

$$+ i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,[(\lambda_1\nu_3+\lambda_3\nu_1)\alpha + \lambda_3\nu_2\beta]$$

Đây là công thức quy trường về xích đạo trong miền tần số. Công thức này cũng tìm được trong miền không gian bằng cách sử dụng các công thức của Baranov,Tsuboi và Tomoda:

$$\Delta T_{\lambda\nu}(x,y) = \sum_m\sum_n \Delta T_{\lambda\nu}(m,n)\frac{\sin\pi(x-m)}{\pi(x-m)}\frac{\sin\pi(y-n)}{\pi(y-n)} \quad (8.157)$$

với m,n là các số nguyên, xác định vị trí của giá trị trường từ $\Delta T_{\lambda\nu}(m,n)$ dọc theo trục x và y lấy trên mạng ô vuông có bước dịch chuyển bằng một đơn vị. Lúc đó :

$$S_{\lambda\nu}(\alpha,\beta) = \sum_m\sum_n \Delta T_{\lambda\nu}(m,n)\mathrm{Exp}[-i(m\alpha+n\beta)] \quad (8.158)$$

với $-\pi \le \alpha \le \pi$ và $-\pi \le \beta \le \pi$.

Nếu chọn điểm tính tại gốc toạ độ (x= y =0) thì từ (8.150), (8.153), (8.155) ta thu được:

$$\Delta T_E(0,0) = \sum_m\sum_n C_E(m,n)\Delta T_{\lambda\nu}(m,n) \quad (8.159)$$

với

$$C_E = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha^2\exp[-i(m\alpha+n\beta)]}{F(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta \quad (8.160)$$

Phương trình (8.159) và (8.160) là các công thức để tính chuyển $\Delta T_{\lambda\nu}(m,n)$ về xích đạo trong miền không gian, muốn vậy phải tính được các hệ số $C_E(m,n)$. Khi độ từ hoá dư được bỏ qua và nếu chọn trục x hướng về phoá bắc, tức là :

$$\lambda_1 = \nu_1 = \cos I;\ \lambda_2 = \nu_2 = 0\ ;\ \lambda_3 = \nu_3 = \sin I$$

$$F(\alpha,\beta)_{\lambda=\nu} = -\alpha^2\cos^2 I + (\alpha^2+\beta^2)\sin^2 I + i\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin 2I$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2\sin^2 I)\exp(i\varphi)$$

trong đó

$$\varphi = \arctan[\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ \sin 2I/(\beta^2\sin^2 I - \alpha^2\cos 2I)]$$

Chia miền tính tích phân trong (8.160) thành 4 góc 1/4:

(i) : $0 \le \alpha \le \pi$ và $0 \le \beta \le \pi$

(ii): $-\pi \le \alpha \le 0$ và $0 \le \beta \le \pi$;

(iii) $-\pi \le \alpha \le 0$ và $-\pi \le \le \pi$;

(iv) $-\pi \le \alpha \le \pi$ và $-\pi \le \beta \le 0$

Chỉ cần tính tích phân trong góc 1/4 thứ nhất sau đó thay (α, β) bằng $(-\alpha, \beta)$ cho góc phần tư thứ hai;$(-\alpha, -\beta)$ cho góc phần tư thứ ba; và $(\alpha, -\beta)$ cho góc phần tư thứ tư, rồi cộng chúng lại. Khi các điều kiện này được thực hiện, tích phân trở thành thực và có dạng sau:

$$C_E(m,n) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\alpha^2\cos(m\alpha+\varphi)\cos(n,\beta)}{\alpha^2+\beta^2\sin^2 I} \tag{8.161}$$

Nếu miền vuông thứ 1/4 thứ nhất: $0\le \alpha \le \pi$ và $0\le \beta \le \pi$ được chia thành hai miền tam giác bằng cách vẽ đường phân giác thứ nhất, thì (8.161) được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} C_E(m,n) &= \\ &-\frac{1}{\pi^2}[\int_0^\pi d\alpha\int_0^\alpha \frac{\alpha^2\cos(m\alpha+\varphi)\cos n\beta}{\alpha^2+\beta^2\sin^2 I}d\beta \\ &+\int_0^\alpha d\beta\int_0^\pi \frac{\alpha^2\cos(m\alpha+\varphi')\cos n\alpha}{\alpha^2+\beta^2\sin^2 I}d\alpha] \end{aligned} \tag{8.162}$$

Hoán vị biến α và β trong số hạng thứ hai của (8.162):

$$C_E(m,n) = $$
$$-\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi d\alpha\int_0^\alpha [\frac{\alpha^2\cos(m\alpha+\varphi)\cos n\beta}{\alpha^2+\beta^2\sin^2 I} + \frac{\beta^2\cos(m\beta+\varphi')\cos n\alpha}{\beta^2+\alpha^2\sin^2 I}]d\beta$$

(8.163)

với

$$\varphi' = \arctan[\beta\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin 2I/(\alpha^2\sin^2 I - \beta^2\cos 2I)]$$

Nếu đặt $\beta = \alpha u$ với u là biến mới giới hạn bởi 0 và 1 và thay đổi thứ tự tính tích phân giữa α và u :

$$C_E(m,n) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi du\Big[\frac{1}{1+\sin^2 I}\int_0^\pi \alpha\cos(m\alpha+\varphi_1)\cos nud\alpha +$$

$$+\frac{u^2}{u+\sin^2 I}\int_0^\pi \alpha\cos(mu\alpha+\varphi_1^{'})\cos n\alpha d\alpha\Big]$$

(8.164)

Trong đó φ_1 và $\varphi_1^{'}$ là các hàm số của u. Lấy tích phân theo α:

$$C_E(m,n) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\Big[\frac{f_1(m,n,u)}{1+u^2\sin^2 I}+\frac{u^2 f_2(m,n,u)}{u^2+\sin^2 I}\Big]du$$

(8.165)

với

$$\varphi_1 = \arctan\frac{\sqrt{1+u^2}\sin 2I}{u^2\sin^2 I-\cos 2I}$$

$$\varphi_1^{'} = \arctan\frac{u\sqrt{1+u^2}\sin 2I}{\sin^2 I-u^2\cos 2I}$$

$$f_1 = \frac{\pi\sin[(m+nu)\pi+\varphi_1]}{m+nu}+\frac{\pi\sin[(m-nu)\pi+\varphi_1]}{m-nu}$$

$$+\frac{\cos[(m+nu)\pi+\varphi_1]}{(m+nu)^2}+$$

$$\frac{\cos[(m-nu)\pi+\varphi_1]}{(m-nu)^2}-\frac{2(m^2+n^2u^2)\cos\varphi_1}{(m^2-n^2u^2)^2}$$

$$f_2 = \frac{\pi\sin[(m+nu)\pi+\varphi_1^{'}]}{m+nu}+\frac{\pi\sin[(m-nu)\pi+\varphi_1^{'}]}{m-nu}+$$

$$\frac{\cos[(m+nu)\pi+\varphi_1^{'}]}{(m+nu)^2}+$$

$$+\frac{\cos[(m-nu)\pi+\varphi_1^{'}]}{(m-nu)^2}-\frac{2(m^2+n^2u^2)\cos\varphi_1^{'}}{(m^2-n^2u^2)^2}$$